Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu Turunen

Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Tentti 15.12.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää tavallisia kirjoitusvälineitä. Koeaika on 4h.

1. Määritellään kuvaus $m : \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että $m(A, x) = Ax$.
   (a) Osoita, että m on ryhmän $\mathrm{SO}(2)$ toiminta vektoriavaruudella $\mathbb{R}^2$.
   (b) Mitkä ovat tämän toiminnan määräämät radat (englanniksi *orbits*)?
   (c) Anna kaksi esimerkkiä ryhmän $\mathrm{SO}(2)$ redusoitumattomista unitaariesityksistä.

2. Määrittele kompaktin ryhmän G vasen- ja oikeasäännölliset esitykset π_L ja π_R, ja osoita, että ne ovat ekvivalentteja unitaariesityksiä. Mille kompakteille ryhmille säännölliset esitykset ovat redusoituvia?

3. Olkoon $\phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^n : G \to \mathrm{U}(n)$ kompaktin ryhmän G jatkuva redusoitumaton esitys.
   (a) Olkoon $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Osoita, että
   $$A := \int_G \phi(y)\, E\, \phi(y^{-1})\, \mathrm{d}\mu_G(y)$$
   on muotoa $A = \lambda_E I$ jollakin $\lambda_E \in \mathbb{C}$. (Schurin lemmaan saa vedota.)
   (b) Osoita, että $\langle \phi_{ij}, \phi_{kl} \rangle_{L^2(\mu_G)} = 0$, kun $i \neq k$.

4. Olkoon G matriisien
   $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   muodostama joukko, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Osoita, että G on lineaarinen Lie-ryhmä; laske myös sen Lie-algebra $\mathfrak{g}$.

5. Seuraavassa ei tarvitse esittää todistuksia:
   (a) Määrittele indusoitu esitys (kompaktin ryhmän suljetun aliryhmän vahvasti jatkuvalle unitaariesitykselle).
   (b) Varusta $\mathbb{C}$-vektoriavaruus $\mathbb{C}$ Hopf-algebran rakenteella.