Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 9, 27.11.2008. (Viimeinen harjoitus!)

Laskuharjoitus 9

9.1. Olkoon $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ Hopf-algebra. Lineaarioperaattorien $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ konvoluutio $A * B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ määritellään

$$A * B := m(A \otimes B)\Delta.$$

(a) Osoita, että

$$A * (B * C) = (A * B) * C,$$

$$A * \eta\varepsilon = A = \eta\varepsilon * A;$$

toisin sanoen $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), m_*, \eta_*)$ on algebra, missä $m_*(A \otimes B) = A * B$ ja $\eta_*(1) = \eta\varepsilon$.

(b) Olkoot $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S_j)$ Hopf-algebroja, kun $j \in \{1, 2\}$. Osoita, että $S_1 = S_2$.

9.2. Olkoon $\mathcal{H}$ kommutatiivinen C^*-algebra niin, että $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ on äärellisdimensioinen Hopf-algebra. Luennoilla määriteltiin äärelliselle joukolle $G := \mathrm{Spec}(\mathcal{H})$ laskutoimitukset

$$((x, y) \mapsto xy := (x \otimes y)\Delta) : G \times G \to G,$$

$$(x \mapsto x^{-1} := xS) : G \to G$$

ja alkio $e := \varepsilon \in G$. Osoita, että näin saadaan joukolle G ryhmän rakenne.

9.3. Olkoon $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ äärellisdimensioinen Hopf-algebra.
Varusta vektoriavaruusduaali $\mathcal{H}' = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ luonnollisella Hopf-algebrarakenteella

$$(\mathcal{H}', \Delta', \varepsilon', m', \eta', S')$$

dualiteetin

$$((f, \phi) \mapsto \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{H}} := \phi(f)) : \mathcal{H} \times \mathcal{H}' \to \mathbb{C}$$

kautta. Piirrä myös tämän duaalisen Hopf-algebran kommutoivat kaaviot.

9.4. Olkoon G äärellinen ryhmä. Varustetaan funktioiden $f : G \to \mathbb{C}$ joukko $\mathcal{F}(G)$ luonnollisella Hopf-algebrarakenteella. Millaiset ovat Hopf-algebran $\mathcal{F}(G)' = \mathcal{L}(\mathcal{F}(G), \mathbb{C})$ laskutoimitukset?