

Laskuharjoitus 8, 17.11.2008.

### Laskuharjoitus 8

**8.1.** Todista, että  $(X \mapsto \exp(X)) : \mathfrak{u}(n) \rightarrow U(n)$  on surjektio.  
(Vinkki: diagonalisoi!)

**8.2.** Todista, että  $(X \mapsto \exp(X)) : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  ei ole surjektio.  
(Vinkki:  $X^2 = \dots$ , joten  $\exp(X) = \dots$ , joten  $\text{Tr}(\exp(X)) \in \dots$ )

**8.3.** Osoita, että  $\mathfrak{su}(2)$  on puolilyksinkertainen (eli "semisimple") Lie-algebra. Ilmoita Lie-algebran  $\mathfrak{su}(2)$  Casimir-alkio  $\Omega$  Pauli-matriisien muodostamassa kannassa  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , missä

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

**8.4.** Olkoon  $\mathfrak{g}$  puolilyksinkertaisen lineaarisen Lie-ryhmän  $G < GL(m, \mathbb{R})$  Lie-algebra.

Tulkitse Casimir-alkio  $\Omega \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  toisen asteen vaseninvarianttina osittaisdifferentiaalioperaattorina  $D_\Omega : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$ .