Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 7, 10-14.11.2008.

Määritelmä. Lie-ryhmän *dimensio* on sama kuin sen Lie-algebran dimensio ($\mathbb{R}$-vektoriavaruutena).

Laskuharjoitus 7

7.1. Luennoilla osoitettiin, että jatkuva homomorfismi $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ on muotoa $t \mapsto \exp(tX)$ eräällä yksikäsitteisellä $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Todista tämä väite todistamalla seuraavat tulokset:

(a) Jos $AB = BA$ ja $\log(A), \log(B), \log(AB)$ on määritelty, niin $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$.

(b) $\log(\phi(t\, m/n)) = (m/n)\ \log(\phi(t))$, kun $m/n \in \mathbb{Q}$, mikäli nämä logaritmit on määritelty.

(c) $\log(\phi(st)) = s \log(\phi(t))$, mikäli nämä logaritmit on määritelty.

(d) $\phi = (t \mapsto \exp(tX))$, missä $X = \ldots$

7.2. Etsi kaikki yksidimensioiset yhtenäiset lineaariset Lie-ryhmät.

7.3. Etsi lineaaristen Lie-ryhmien $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$ ja $\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1\}$ Lie-algebrat $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$ ja $\mathfrak{su}(n)$. Mitkä ovat näiden lineaaristen Lie ryhmien dimensiot?

7.4. Olkoon G lineaarinen Lie-ryhmä. Sileä kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ on *geodeesi*, jos

$$\forall s, t \in \mathbb{R} :\ \gamma(s)^{-1}\gamma'(s) = \gamma(t)^{-1}\gamma'(t).$$

Luonnehdi eksponenttikuvauksen avulla kaikki sellaiset geodeesit γ, joille $\gamma(0) = I$.