Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 6, 5.11.2008.

Laskuharjoitus 6

6.1. Olkoon G kompakti ryhmä ja $H < G$ suljettu. Olkoot unitaariesitykset $\phi_1 \in \mathrm{Hom}(H,\mathcal{U}(\mathcal{H}_1))$ ja $\phi_2 \in \mathrm{Hom}(H,\mathcal{U}(\mathcal{H}_2))$ vahvasti jatkuvia. Osoita, että $\mathrm{Ind}_H^G(\phi_1 \oplus \phi_2) \sim (\mathrm{Ind}_H^G\phi_1) \oplus (\mathrm{Ind}_H^G\phi_2)$.

6.2. Olkoon G kompakti ryhmä ja $H < G$ suljettu. Olkoon esitys $\phi = (h \mapsto I) \in \mathrm{Hom}(H,\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, missä $I = (u \mapsto u) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
(a) Osoita, että $\mathrm{Ind}_\phi^G\mathcal{H} \cong L^2(G/H, \mathcal{H})$, missä avaruuden $L^2(G/H, \mathcal{H})$ sisätulon antaa

$$\langle f_{G/H}, g_{G/H}\rangle_{L^2(G/H,\mathcal{H})} := \int_{G/H} \langle f_{G/H}(xH), g_{G/H}(xH)\rangle_{\mathcal{H}}\, \mathrm{d}\mu_{G/H}(xH),$$

kun $f_{G/H}, g_{G/H} \in C(G/H, \mathcal{H})$.
(b) Olkoon $K < G$ suljettu. Olkoot π_K ja π_G kompaktien ryhmien K ja G vasensäännölliset esitykset. Osoita, että $\pi_G \sim \mathrm{Ind}_K^G\pi_K$.
(Vinkki: $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, $H = \{e\}$ ja $\ldots \sim \mathrm{Ind}_H^G\phi \sim \mathrm{Ind}_K^G\mathrm{Ind}_H^K\phi \sim \ldots$)

6.3. Varustetaan ryhmät $(\mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, x \mapsto -x)$ ja $(\mathbb{R}^+ = (0,\infty), (x, y) \mapsto xy, x \mapsto x^{-1})$ luonnollisilla topologioillaan.
(a) Osoita, että nämä ovat isomorfisia topologisina ryhminä.
(b) Etsi ryhmän $\mathbb{R}$ kaikki suljetut aliryhmät.
(c) Etsi ryhmän $\mathbb{R}^+$ kaikki suljetut aliryhmät.

6.4. Olkoon $\mathbb{H} = \{x = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ kvaternioalgebra (eli $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$). Varustetaan $\mathbb{H}$ normilla $\|x\|_{\mathbb{H}} := (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Osoita, että $\mathrm{Sp}(1) := \{x \in \mathbb{H} : \|x\|_{\mathbb{H}} = 1\}$ on topologinen ryhmä, joka on isomorfinen Lie-ryhmän $\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{U}(2) \mid \det(A) = 1\}$ kanssa.