Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 5, 22.10.2008.

Laskuharjoitus 5

5.1. Olkoon G kompakti ryhmä. Osoita, että vasen- ja oikeasäännölliset unitaariesitykset $\pi_L, \pi_R : G \to \mathcal{U}(L^2(\mu_G))$ ovat vahvasti jatkuvia. Toisin sanoen

$$\|(\pi_L(x) - \pi_L(y))f\|_{L^2(\mu_G)} \to_{x \to y} 0$$

kaikilla $f \in L^2(\mu_G)$,

5.2 Olkoon G kompakti ryhmä. Osoita, että vasen- ja oikeasäännölliset unitaariesitykset eivät välttämättä ole normissa jatkuvia. Toisin sanoen on olemassa kompakteja ryhmiä G, joilla

$$\|\pi_L(x) - \pi_L(y)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mu_G))} \not\to_{x \to y} 0.$$

5.3. Tee tehtävä 1.4. uudelleen nyt, kun Peter–Weyl -lausekin tunnetaan:
Olkoon G epäkommutatiivinen ja $|G| = 6$. Varustetaan $\mathcal{F}(G)$ edellisen tehtävän sisätulolla ja olkoon $\pi_L : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{F}(G))$ kuten edellä. Etsi π_L-invariantit aliavaruudet ja hae niille ortonormaalit kannat. (Vihje: tarkastele tasasivuisen kolmion symmetriaryhmää...)

5.4. Olkoot $\phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^m$ ja $\psi = (\psi_{kl})_{k,l=1}^n$ kompaktin ryhmän redusoitumattomia jatkuvia unitaarimatriisiesityksiä. Oletetaan, että $\phi \not\sim \psi$. Laske

$$\phi_{ij} * \phi_{i'j'}, \quad \phi_{ij} * \psi_{kl}, \quad \chi_\phi * \chi_\phi, \quad \chi_\phi * \chi_\psi,$$

missä karakteeri $\chi_\phi = \mathrm{Tr}(\phi) = \sum_{j=1}^m \phi_{jj}$.