Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 4, 15.10.2008.

Laskuharjoitus 4

4.1. Todista, että $(\mathcal{M}_G, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta)$ on monoidi. Olkoon $\delta_x \in \mathcal{M}_G$ määritelty $\delta_x(x) = 1$ (jolloin toki $\delta_x(y) = 0$, kun $y \neq x$); laske $\delta_x * \delta_y$. Päättele, että $\mathcal{M}_G$ on kommutatiivinen jos ja vain jos G on kommutatiivinen. Miksi $\mathcal{M}_G$ ei ole ryhmä, kun $|G| > 1$?

4.2. Varustetaan $G = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ tavallisella ryhmän rakenteella. Olkoon $m \in \mathbb{Z}^+$. Määritellään näytemitta $\alpha_m \in \mathcal{M}_G$ siten, että

$$\alpha_m(z) = \begin{cases} m^{-1}, & \text{kun } z \in \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi j/m} \right\}_{j=0}^{m-1}, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Olkoon

$$f : G \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, z^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right| < \infty.$$

Laske $\int_G f \, \mathrm{d}\alpha_m$ ja $\int_G f \, \mathrm{d}\mu_G$, missä μ_G on ryhmän G Haar-mitta (joka onkin hyvin tuttu...)

4.3. Piste $x \in \mathbb{S}^2$ voidaan tunnetusti kirjoittaa pallokoordinaateissa muodossa

$$x(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\ \sin(\theta) \\ \sin(\phi)\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

missä $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \phi < 2\pi$.
(a) Olkoon $q = x(0, 0) \in \mathbb{S}^2$, q on siis yksikköpallon pohjoisnapa. Olkoon $((A, x) \mapsto Ax) : \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ on toiminta tavalliseen tapaan. Kuinka parametrisoit isotropia-aliryhmän $\mathrm{SO}(3)_q$ käyttäen kulmaa $\psi \in [0, 2\pi[$?

(b) Tiedämme, että $\mathbb{R}^3$:n Lebesgue-mitta $\mu_{\mathbb{R}^3}$ on rotaatio-invariantti ja että pallokoordinaateissa

$$\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}^3} = r \sin(\theta) \mathrm{d}\phi \ r\mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}r.$$

Johda tästä lauseke

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{SO}(3)} = \frac{1}{8\pi^2} \sin(\theta) \ \mathrm{d}\phi \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\psi.$$

Muistutus: $\int_G f \, \mathrm{d}\mu_G = \int_{G/H} \int_H f(xh) \ \mathrm{d}\mu_H(h) \ \mathrm{d}\mu_{G/H}(xH)$; nyt $G = \mathrm{SO}(3)$, $H = \mathrm{SO}(3)_q$...

4.4. Olkoon $\phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ kompaktin ryhmän G vahvasti jatkuva esitys Hilbert-avaruudella $\mathcal{H}$. Todista, että $\mathcal{H}$:lla on olemassa ϕ-invariantti sisätulo $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_\phi$, toisin sanoen

$$\langle \phi(x)u, \phi(x)v \rangle_\phi = \langle u, v \rangle_\phi$$

kaikilla $x \in G$ ja kaikilla $u, v \in \mathcal{H}$. Siten ϕ on unitaariesitys tämän sisätulon suhteen!