Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 3, 8.10.2008.

Laskuharjoitus 3

3.1. Olkoon $\phi \in \mathrm{Hom}(G, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ vahvasti jatkuva. Luennoilla osoitettiin, että

$$\phi \text{ on syklisten esitysten suora summa.}$$

Tässä todistuksessa tarvittiin Zornin lemmaa, joka on valinta-aksiooman kanssa yhtäpitävä; jos $\mathcal{H}$ on kuitenkin separoituva, voidaan todistus rakentaa ilman valinta-aksioomaa. Miten?

(Vinkki: osoita, että $\phi|_{\overline{V}}$ on syklinen, kun $V = \mathrm{span}\, \phi(G)v$, $v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.
Muista myös, että separoituvalla Hilbert-avaruudella on numeroituva ortonormaali kanta!)

3.2. Todista, että $\mathrm{SO}(n)$ on yhtenäinen kaikilla $n \in \mathbb{Z}^+$.

(Vinkki: luonnollinen toiminta $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, induktio n:n suhteen...).

3.3. Todista, että $\mathrm{SO}(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kompakti, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ lokaalisti kompakti ei-kompakti.

3.4. Olkoon G kompakti ryhmä, jonka topologian antaa metriikka $d : G \times G \to \mathbb{R}$.

a) Osoita, että

$$d_0 = \left((x, y) \mapsto \sup_{a,b \in G} d(axb, ayb)\right) : G \times G \to \mathbb{R}$$

on metriikka, jolle

$$d_0(x, y) = d_0(xz, yz) = d_0(zx, zy) = d_0(x^{-1}, y^{-1})$$

kaikilla $x, y, z \in G$.

b) Näytä, että metriikat d ja d_0 määräävät saman topologian.

c) Anna esimerkki, jossa d ja d_0 eivät ole ekvivalentteja.