Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen/Karimäki**

Laskuharjoitus 2, ke 1.10.2008 klo 10:10-11:40 (U322)

Laskuharjoitus 2

Määritelmä. Olkoon X Banach-avaruus. Sanotaan, että lineaarikuvaus $A : X \to X$ on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio $c < \infty$ siten, että $\|Ax\| \leq c\|x\|$ jokaisella $x \in X$. Rajoitettujen lineaarikuvausten $A : X \to X$ joukkoa merkitään $\mathcal{L}(X)$, ja se varustetaan normilla $A \mapsto \|A\|$, missä

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \ x \in X, \ \|x\| \leq 1\}.$$

2.1. Varustetaan n-dimensioinen torus $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ tekijäryhmän rakenteella. Varustetaan $\mathbb{T}^n$ lisäksi tavallisella Lebesgue-mitallaan. Olkoot $\pi_L, \pi_R : \mathbb{T}^n \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^n))$ määritelty

$$(\pi_L(y)\, f)(x) := f(x - y),$$

$$(\pi_R(y)\, f)(x) := f(x + y)$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{T}^n$. Osoita, että π_L ja π_R ovat ekvivalentteja redusoituvia unitaariesityksiä. Millaiset ovat näiden esitysten ne pienimmät invariantit aliavaruudet, joihin kuuluu funktio $x \mapsto e^{i2\pi x\cdot\xi}$ (missä $\xi \in \mathbb{Z}^n$)?

2.2. Olkoon X Banach-avaruus. Olkoon $\mathrm{Aut}(X)$ lineaaristen bijektioiden $A : X \to X$ joukko. Varustetaan joukko $\mathrm{AUT}(X) := \mathrm{Aut}(X) \cap \mathcal{L}(X)$ metriikalla

$$(A, B) \mapsto \|A - B\|_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{x \in X:\ \|x\|_X \leq 1} \|(A - B)x\|_X.$$

Osoita, että $\mathrm{AUT}(X)$ on topologinen ryhmä.

2.3. Osoita, että topologisen ryhmän määritelmässä ehto “$\{e\} \subset G$ on suljettu” voidaan korvata oletuksella “G on Hausdorff-avaruus”.

2.4. Olkoon G kompakti ryhmä, $x \in G$ ja $A = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Todista, että sulkeuma $\overline{A} < G$.