Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria **Turunen**

Laskuharjoitus 1, 24.9.2008.

Laskuharjoitus 1

1.1. Olkoon G ryhmä ja $x, y \in G$. Todista:
(a) $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.
(b) Jos $xy = e$, niin $y = x^{-1}$.
(c) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

1.2. Etsi (isomorfiaa vaille) kaikki ryhmät G, joille $|G| = 6$.

1.3. Olkoon G ryhmä, $|G| < \infty$, ja olkoon $\mathcal{F}(G)$ funktioiden $f : G \to \mathbb{C}$ joukko (varustettuna luonnollisella $\mathbb{C}$-vektoriavaruusrakenteella). Olkoon

$$\int_G f \, \mathrm{d}\mu_G := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x),$$

kun $f \in \mathcal{F}(G)$. Varustetaan $\mathcal{F}(G)$ sisätulolla

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \, \overline{g} \, \mathrm{d}\mu_G.$$

Olkoot $\pi_L, \pi_R : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{F}(G))$ määritelty

$$(\pi_L(y)\ f)(x) := f(y^{-1}x),$$

$$(\pi_R(y)\ f)(x) := f(xy).$$

Osoita, että π_L ja π_R ovat ekvivalentteja unitaariesityksiä.

1.4. Olkoon G epäkommutatiivinen ja $|G| = 6$. Varustetaan $\mathcal{F}(G)$ edellisen tehtävän sisätulolla ja olkoon $\pi_L : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{F}(G))$ kuten edellä. Etsi π_L-invariantit aliavaruudet ja hae niille ortonormaalit kannat. (Vihje: tarkastele tasasivuisen kolmion symmetriaryhmää...)