Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

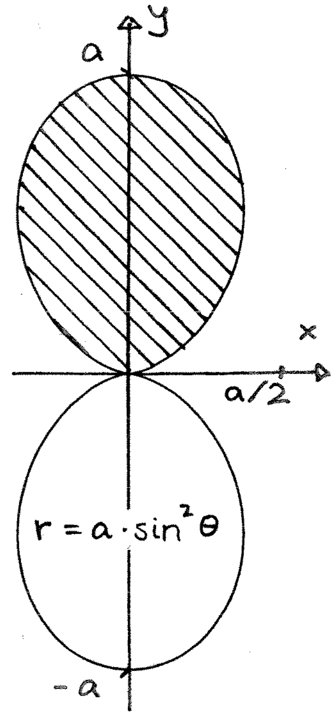
Turbotentamen 21.5.2010

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes för sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes för första gången våren -06; 10sp) som ni skriver.
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.

Vid denna turbotentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga! Förenkla lämpligast svaren. Lämna t.ex inte uttryck på formen $\sqrt{9}$ eller $\cos 0$, utan skriv i stället 3 resp. 1. Med slösa inte bort tid på att förenkla besvärliga bråktal! På baksidan finns en del FORMLER givna.

MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 2, 4, 6, 7 och 10.

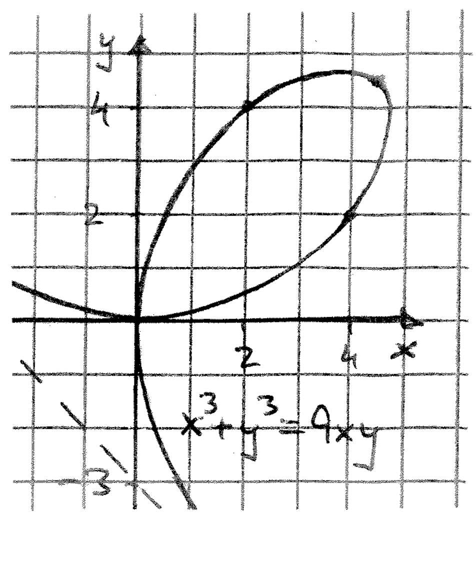


1. Kurvan, som på polär form ges av $r = a\sin^2\theta, a > 0$, bildar en åtta som i den övre figuren till höger. Beräkna volymen hos kroppen som uppstår då det i figuren skuggade området roterar kring x-axeln. (Märk: x-axeln, inte y-axeln!)

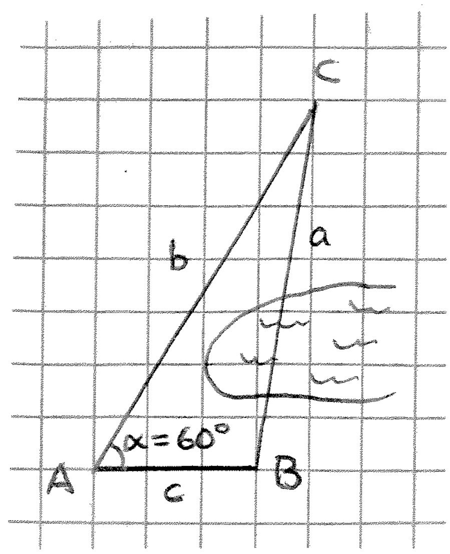
2. Exponentialfunktionen e^t ges som bekant av potensserien $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} t^k/k!$, som konvergerar för alla $t \in \mathbf{R}$. Använd detta till att approximera integralen $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ med ett fel som till absolutbeloppet är $< 1/1000$.

3. Om f och g är differentierbara reellvärda funktioner, definierade i $\mathbf{R}$, så gäller som bekant att $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. Låt nu $\vec{u}(t) = u_1(t)\vec{\imath} + u_2(t)\vec{\jmath} + u_3(t)\vec{k}$ och $\vec{v}(t) = v_1(t)\vec{\imath} + v_2(t)\vec{\jmath} + v_3(t)\vec{k}$ vara 3-vektorvärda funktioner, definierade i $\mathbf{R}$. Visa följande analogier till deriveringsformeln ovan:
a) $(\vec{u} \bullet \vec{v})'(t) = \vec{u}'(t) \bullet \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \bullet \vec{v}'(t)$,
b) $(\vec{u} \times \vec{v})'(t) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$.

4. En plan kurva $y = f(x)$ har i en punkt $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ krökningsradien $\rho(x_0) = ((1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}/|f''(x_0)|$, förutsatt att detta uttryck existerar. Kurvan $x^3 + y^3 = 9xy$ i den nedre figuren till höger kallas för Cartesii blad. Använd implicit derivering för att bestämma dess krökningsradie i punkten $(x_0, y_0) = (9/2, 9/2)$.



5. Svakar vill mäta avståndet a mellan två punkter B och C. För detta använder han en primitiv sextant (ett navigationsinstrument, inte en nybörjar-prostituerad!), med vars hjälp han tämligen exakt kan få vinkeln $60°$ och promenerar, tills han hittar en punkt A, där vinkeln mellan AB och AC är $60°$. Därefter uppmäter han avståndet AB till $c = 300 \pm 5m$ och avståndet AC till $b = 800 \pm 10m$ (se figuren till höger). Cosinus-satsen (se formeln nedan) ger då att avståndet BC är $a \approx 700m$. Använd differentialen till att bestämma en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $a \approx 700m$.



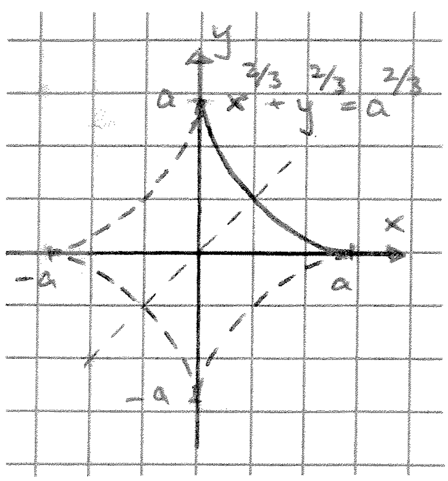
6. Halvklotet $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ har i punkten $(x, y, z) \in B$ densiteten $\delta(x, y, z) = x^4y^2z$.
I vilken punkt/vilka punkter antar densiteten sitt maximum?

7. Halvklotet $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ har i punkten $(x, y, z) \in B$ densiteten $\delta(x, y, z) = x^4y^2z$.
a) Bestäm B:s massa m. (Svar: $m \approx 0.00491$)
b) På grund av symmetri finns B:s tyngdpunkt på z-axeln. Bestäm tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z}$. (Svar: $\bar{z} \approx 0.369$)
Gott råd: Pga. B:s form kan cylindriska eller sfäriska koordinater vara lämpliga.

8. Låt $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ vara en konstant vektor och $\vec{r}$ positionsvektorfältet $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Förenkla uttrycken
a) $\nabla(\vec{u} \bullet \vec{r})$, b) $\nabla(\vec{r} \bullet \vec{r})$, c) $(\vec{r} \bullet \nabla)\vec{r}$, d) $\nabla \bullet (\vec{u} \times \vec{r})$, e) $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{r})$, f) $(\vec{u} \times \nabla) \times \vec{r}$.
(Håll reda på vad som är ett skalärfält och vad som är ett vektorfält!)

9. Nivåkurvorna för $F(x, y) = x^2 + 3y^2$ är en skara ellipser. Bestäm ortogonala kurvskaran till denna ellipsskara. (Observera att koordinataxlarna ingår i den ortogonala kurvskaran.)

10. Asteroidkurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$ kan ges på parameterform som $\vec{r}(t) = a\cos^3 t\vec{i} + a\sin^3 t\vec{j}$. Vi studerar den fjärdedelen av asteroidkurvan, som finns i 1:a kvadranten $x, y \leq 0$. Dess längd L är som bekant (?) $L = 3a/2$ och av symmetriskäl finns dess tyngdpunkt på linjen $x = y$. Bestäm tyngdpunkten hos denna fjärdedel av asteroidkurvan genom att antingen beräkna tyngdpunktens x-koordinat $\bar{x} = \frac{1}{L}\int_C x \cdot ds$ eller tyngdpunktens y-koordinat $\bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y \cdot ds$.



Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2, a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Glöm inte att fylla i kursutvärderingen på hemsidan.
Ha en trevlig sommar och tack för den gångna terminen! Georg M.