Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Turbotentamen 15.5.2009

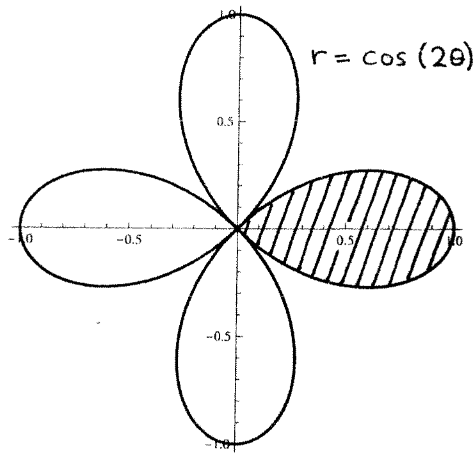
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som föreläste för sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som föreläste för första gången våren -06; 10sp) som ni skriver.
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.

Vid denna turbotentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga! På baksidan finns en del FORMLER givna.

MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 2, 4, 6, 9 och 10.

1. Beräkna längden hos rymdkurvan $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j} + 3t^4\vec{k}$ från origo till punkten $(3, 4, 3)$.
2. Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-1/2}$ med ett rationellt tal så att felet till absolutbeloppet är < 0.005. ($e^{-1/2} \approx 0.60653$. Använd gärna detta efteråt för att *kontrollera* svaret.)



3. Kurvan $r = \cos(2\theta)$ i polära koordinater bildar en fyrklöver som i figuren till höger. Vi vill beräkna volymen hos den rotationssymmetriska kroppen som uppstår, då det i figuren skuggade klöverbladet roterar kring y-axeln. Sätt upp integralen som ger denna volym på en sådan form, att den enkelt kan beräknas mha. t.ex. Mathematica. Själva volymen behöver inte beräknas.
4. Ekvationen $z \cdot \ln(x - y) + z^5 + e^{y-2z} = 2$ definierar implicit en funktion $z = g(x, y)$ i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ sådan att $g(3, 2) = 1$. (Detta är givet i uppgiften och behöver inte visas.) Beräkna de partiella derivatorna $\frac{\partial g}{\partial x}(3, 2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(3, 2)$ och $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(3, 2)$.
5. Punkten $P(1, 1, 1)$ tillhör ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. Normallinjen till ellipsoiden i punkten P skär ellipsoiden också i en annan punkt Q. Bestäm Q.
6. Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms inuti ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ så att dess sidoytor är parallella med koordinatplanen. (Gott råd: utnyttja symmetrin.)

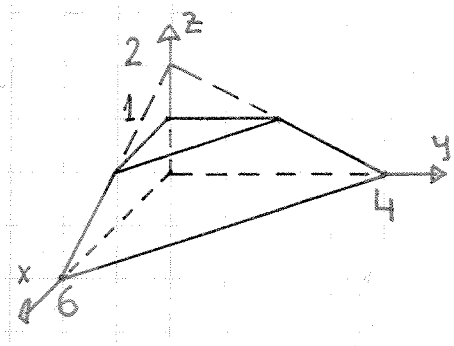
Fortsättning på baksidan.

7. En cirkelskiva med radien R och följdaktligen arean $A = \pi R^2$ har på avståndet $r \leq R$ från mittpunkten area-densiteten $\delta(r) = \delta_0 \cdot \cos(\frac{\pi r}{2R})$, så area-densiteten är störst i mittpunkten och avtar sedan närmare periferin. Beräkna cirkelskivans genomsnittliga densitet (massan/arean).

8. $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} - xz\vec{k}$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, där den slutna kurvan C går från punkten $(1,0,0)$ längs helixen (korkskruven) $\vec{r}(t) = \cos t\vec{\imath} + \sin t\vec{\jmath} + \frac{t}{2}\vec{k}$ till punkten $(1,0,\pi)$ och sedan tillbaka till punkten $(1,0,0)$ rätlinjigt.

9. a) För funktioner $f(t)$ och $g(t)$ av klass $C^1(\mathbf{R})$ gäller som bekant att $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}$. Visa den analoga formeln $\nabla \times (\Phi \cdot \vec{G}) = (\nabla\Phi) \times \vec{G} + \Phi \cdot (\nabla \times \vec{G})$, dvs. $rot(\Phi \cdot \vec{G}) = grad(\Phi) \times \vec{G} + \Phi \cdot rot(\vec{G})$ för skalärfält $\Phi(\vec{x})$ och vektorfält $\vec{G}(\vec{x})$ av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$.
b) För vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ gäller som bekant att $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$. Motsvarande behöver naturligtvis inte gälla, om ∇ är inblandad. Visa att om $\vec{F}$ och $\vec{G}$ är två vektorfält av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$, så är $\nabla \bullet (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \bullet \vec{G} - \vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{G})$, dvs. $div(\vec{F} \times \vec{G}) = (rot(\vec{F})) \bullet \vec{G} - \vec{F} \bullet (rot(\vec{G}))$.

10. Den stympade pyramiden i figuren till höger begränsas av koordinatplanen, planet $z = 1$ samt planet, som går genom punkterna $(6,0,0), (0,4,0)$ och $(0,0,2)$. Dess volym är naturligtvis 7. Beräkna dess massa, om dess denstiet i punkten (x,y,z) är $\delta(x,y,z) = 2y$.



Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2$

Glöm inte att fylla i kursutvärderingen på hemsidan.
Ha en trevlig sommar och tack för det gångna läsåret! Georg M.