Institutionen för matematik
Tekniska högskolan
Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

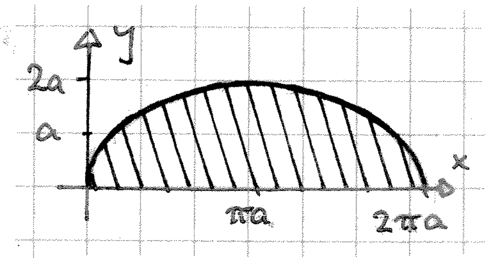
Turbotentamen 18.5.2007

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes för sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes för första gången våren -06; 10sp) som ni skriver.
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.

Vid denna turbotentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!
På baksidan finns en del formler givna.

MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 1, 5, 7, 9 och 10.



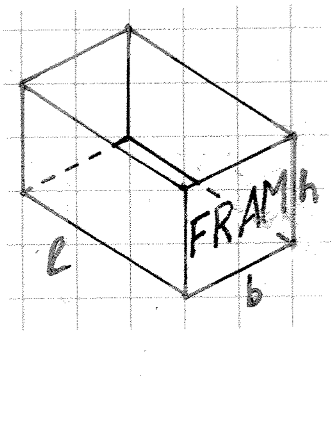
1. En båge av cykloiden ges på parameterform av $x(\phi) = a(\phi - \sin\phi), y(\phi) = a(1 - \cos\phi)$, $0 \le \phi \le 2\pi, a > 0$. Beräkna volymen hos kroppen som uppstår då det plana området som begränsas av cykloidbågen och x-axeln (skuggat i figuren ovan) roterar kring x-axeln.

2. Beräkna arean hos begränsningsytan till kroppen i föregående uppgift. (Kontrollmöjlighet, om även uppgift 1 lösts: om en kropp har volymen V och dess begränsningsyta har arean A, så är $A^3/V^2 \ge 36\pi$ med likhet endast om kroppen är ett klot.)

3. a) Bestäm konvergensintervallet för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n^2} = \frac{x}{3\cdot 1} + \frac{x^2}{9\cdot 4} + \frac{x^3}{27\cdot 9} + \frac{x^4}{81\cdot 16} + \cdots$. Glöm inte att undersöka konvergensen i eventuella ändpunkter hos intervallet.
b) Bestäm något N så att delsumman $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n \cdot n^2}$ approximerar summan S hos talserien $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^2} = \frac{1}{3\cdot 1} + \frac{1}{9\cdot 4} + \cdots$ med ett fel $<1/100$. Förklara hur man kan veta att detta N räcker.

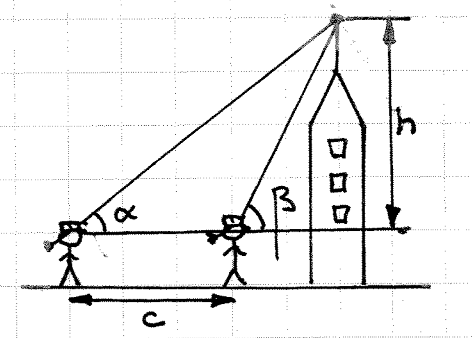
4. I en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ definierar ekvationen $\sin(x - y) + yz + e^z = 1$ implicit en funktion $z = g(x, y)$ sådan att $g(1, 1) = 0$. (Detta är givet i uppgiften och behöver alltså inte visas.) Beräkna den partiella derivatan $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 1) = g_{yx}(1, 1)$.

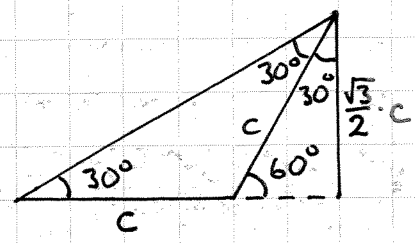
5. Vi vill tillverka en rätblocksformad låda utan lock så att volymen blir $V = 60dm^3$. Materialet till botten och framsidan kostar $5e/dm^2$ och till de övriga tre sidorna $1e/dm^2$. Hur skall lådan dimensioneras för att materialkostnaden skall minimeras och hur stor blir materialkostnaden i så fall?



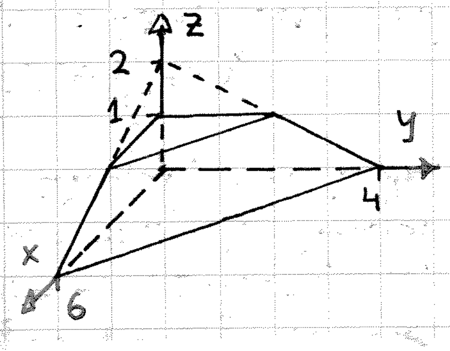
Fortsättning på baksidan.

6. Svakar vill mäta hur högt ovanför hans ögonhöjd toppen hos en flaggstång uppe på ett torn är. För detta ändamål mäter han vinkeln α, går sträckan c rakt mot tornet och mäter sedan (den större) vinkeln β.
a) Uttryck höjden $h(\alpha, \beta, c)$ som en funktion av α, β och c. (2p.)
b) Svakar uppmätte $\alpha = 30 \pm 2°, \beta = 60 \pm 3°$ och $c = 30 \pm 1m$ och fick $h \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \approx 26m$. (Använd gärna detta för att kontrollera formeln i a)-delen.) Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $h \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30m$, som osäkerheterna i mätdata ger upphov till. (4p.)





7. Den stympade pyramiden i figuren till höger begränsas av koordinatplanen, planet $z = 1$ samt planet, som går genom punkterna $(6, 0, 0), (0, 4, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Dess volym är naturligtvis 7. Beräkna dess massa, om dess densitet i punkten (x, y, z) är $\delta(x, y, z) = z^2$.

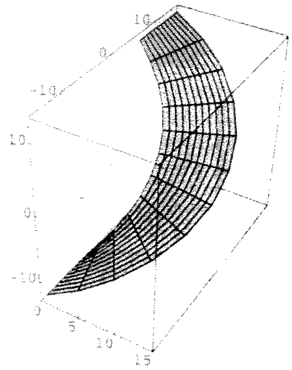


8. $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k} = u\cos(v)\vec{\imath} + u\sin(v)\vec{\jmath} + 8v\vec{k}$, $6 \le u \le 15, -\pi/2 \le v \le \pi/2$ ger en yta på parameterform, nämligen helicoiden (spiralrampen) i figuren längst nere till höger vid uppgift 10 (ritad med Mathematica). Bestäm dess area. (Svar: area$n\approx376$)

9. a) För funktioner $f(t)$ och $g(t)$ av klass $C^1(\mathbf{R})$ gäller som bekant att $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}$. Visa den analoga formeln $\nabla \bullet (\Phi \cdot \vec{G}) = (\nabla(\Phi)) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot (\nabla \bullet \vec{G})$, dvs. $div(\Phi \cdot \vec{G}) = (grad(\Phi)) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot div(\vec{G})$ för skalärfält $\Phi(\vec{x})$ och vektorfält $\vec{G}(\vec{x})$ av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$.
b) För vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ i $\mathbf{R}^3$ gäller som bekant att $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$. Motsvarande behöver naturligtvis inte gälla om ∇ är inblandad. Visa att om $\vec{F}$ och $\vec{G}$ är vektorfält av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$, så är $\nabla \bullet (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \bullet \vec{G} - \vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{G})$, dvs. $div(\vec{F} \times \vec{G}) = (rot(\vec{F})) \bullet \vec{G} - \vec{F} \bullet (rot(\vec{G}))$.

10.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^4}{x^2 + 5y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



a) Undersök om f är kontinuerlig eller diskontinuerlig i origo.
b) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ för $(x, y) \neq (0, 0)$.
c) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.
d) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
e) Undersök om $\frac{\partial f}{\partial x}$ är kontinuerlig eller diskontinuerlig i origo.
f) Undersök om $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerlig eller diskontinuerlig i origo.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2,$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta), \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta),$
$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots,$
$\int \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{t^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) + C.$