Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

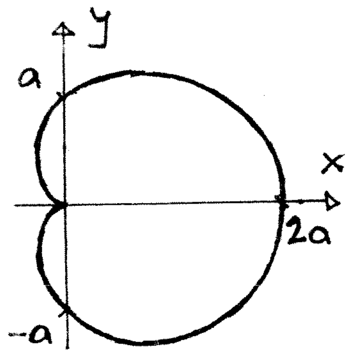
Turbotentamen 19.5.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes för sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes för första gången våren -06; 10sp) som ni skriver.
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo.

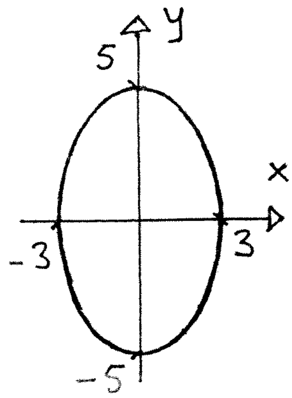
MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 1, 2, 5, 6 och 10.

Vid denna turbotentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Kardioiden, som i polära koordinater ges av $r = a(1 + \cos\theta)$ (se figuren till höger) roterar kring x-axeln. Därvid uppstår en rotationssymmetrisk yta. Visa att dess area är $32\pi a^2/5$.

2. Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-1/2}$ med ett rationellt tal så att felet till absolutbeloppet är < 0.0005. (Fickräknarens värde $e^{-1/2} \approx 0.60653066$ får gärna användas *efteråt* för kontroll.)



3. Krökningen $\kappa(t)$ hos en kurva $\bar{r}(t)$ ges som bekant av $\kappa(t) = \frac{|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|^3}$ och krökningsradien $\rho(t)$ av $\rho(t) = 1/\kappa(t)$. Beräkna krökningsradien hos ellipsen $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ (se figuren till höger) i de punkter, där den skär koordinataxlarna. Gott råd: börja gärna med att bestämma en lämplig parametrisering av ellipsen.

4. För en liten silverkluns på formen av en rät cirkulär cylinder uppmättes följande: radien $r = 0.50 \pm 0.01cm$, höjden $h = 2.20 \pm 0.03cm$, massan $m = 17.2 \pm 0.1g$.
a) Vad ger detta för approximativt värde på silverklunsens densitet? (1p.)
b) Använd *differentialen* till att bestämma en approximativ övre gräns för osäkerheten i skattningen av densiteten i a)-delen, som osäkerheterna i r, h och m ger upphov till. (5p.)

5. I vilka punkter skär normallinjen till ytan $z = x^2y^3$ i punkten $(1, 2, 8)$ koordinatplanen?

6. Temperaturen i punkten (x, y, z) på enhetssfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ ges av $T(x, y, z) = xy+yz$ (godtyckliga enheter). I vilken punkt / vilka punkter är temperaturen högst och hur hög är den där?

Fortsättning på baksidan.

7. Visa att vektorfältet $\vec{F}(x, y, z) = \cos y\vec{\imath} + (2ye^z - x\sin y)\vec{\jmath} + (y^2e^z + 3z^2)\vec{k}$ är virvelfritt i $\mathbf{R}^3$, dvs. att $\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}(\vec{F}) = \mathrm{curl}(\vec{F}) \equiv \vec{0}$ samt bestäm en potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ till $\vec{F}$ sådan att $\vec{F} = \nabla\Phi = \mathrm{grad}(\Phi)$. Använd potentialfunktionen för att beräkna $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, där C är en halvcirkelbåge från $(0, 1, 0)$ till $(-3, 0, 2)$.

8. Beräkna flödet $\oiint_S \vec{v} \bullet \hat{N} dS$ av vektorfältet $\vec{v}(x, y, z) = \vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ ut genom sfären S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ antingen direkt som en ytintegral eller genom att omvandla den till en trippelintegral med hjälp av divergenssatsen (Gauss' sats). Gott råd: utnyttja symmetrin.

9. a) En icke-linjär differentialekvation på formen $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x) \cdot (y(x))^a$, där $a \notin \{0, 1\}$, g och h är givna funktioner och y är den sökta funktionen, kallas för en *Bernoulli*-ekvation. Visa att den kan omvandlas till en linjär differentialekvation genom att införa en hjälpfunktion $z(x) = (y(x))^{1-a}$.
b) Lös Bernoulli-ekvationen $y'(x) - 2y(x) = -(y(x))^2$ under begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ t.ex genom att omvandla den till en linjär differentialekvation eller genom att utnyttja att det rör sig om en separabel differentialekvation.

10. Beräkna volymen hos kroppen, som finns innanför den räta cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = x$ och enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Gott råd: på grund av kroppens form kan cylindriska koordinater vara lämpliga. (Svar: $V \approx 1.2055$)

Ha en riktigt trevlig sommar!
Georg M.