Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 28.8.2008

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

I uppgifterna 2 och 3 kan man ANTINGEN lösa a)-delen ELLER b)-delen. Observera, att delarna ger olika antal poäng.

1. Avgör om serien konvergerar eller divergerar. Motivera svaret. (Och som motivering räcker det inte att bara nämna namnet på något konvergens-kriterium, som kanske har, kanske saknar relevans i sammanhanget!) (2p.+2p.+2p.)

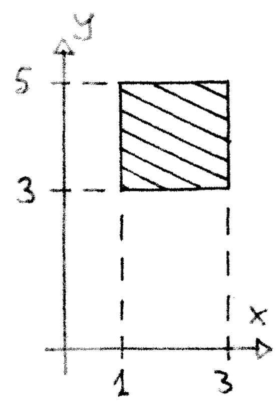
$$i)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/\sqrt{n}}, \qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad iii)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n.$$

2a) I vilken punkt skär normallinjen till ytan $x^2 + y^3 + z^5 = 3$ i punkten $(1, 1, 1)$ xy-planet? (3p.)

2b) Tangentplanet till ytan $x^2 + y^3 + z^5 = 3$ i puntken $(1, 1, 1)$ avgränsar tillsammans med koordinatplanen en tetraeder, som har ett hörn i origo. Bestäm volymen hos denna tetraeder. (6p.)

3a) Vid en variabel-substitution $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k}$ i en dubbelintegral ersätts area-elementet $dA = dxdy$ som bekant med $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$, där $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ är transformationens Jacobian och kan ses som en förstoringsfaktor. Visa att vid övergång till polära koordinater r och θ via $x(r, \theta) = r\cos\theta, y(r, \theta) = r\sin\theta$ blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = r$. (Därför ersätts $dA = dxdy$ inte med $drd\theta$ utan med $rdrd\theta$ vid övergång till polära koordinater.) (3p.)

3b) Beräkna massan hos den delen av ytan $z = f(x, y) = \sqrt{2xy}$, vars projektion på xy-planet är kvadraten $1 \leq x \leq 3 \leq y \leq 5$, om areadensiteten i punkten (x, y, z) på ytan är $\delta(x, y, z) = 2z$ (godtyckliga enheter). (6p.)



4. $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$, då $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
i) Visa att $div(\vec{F}) = \nabla \bullet \vec{F} \equiv 0$ i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
ii) Visa att $rot(\vec{F}) = curl(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} \equiv \vec{0}$ i $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
iii) Beräkna $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, då C är enhetscirkeln i xy-planet genomlupen ett varv moturs. (2p.+2p.+2p.)

5. Bestäm de tre icke-negativa talen a, b och c sådana att deras summa är 6 och så att produkten ab^2c^3 är så stor som möjligt. (6p.)