Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

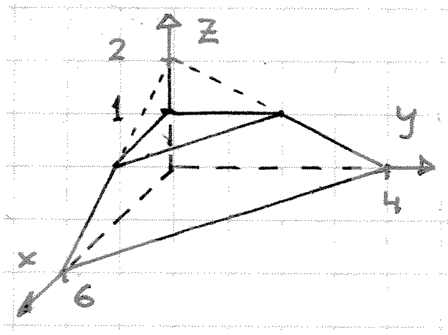
Tentamen 9.1.200~~7~~ 8

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

1. a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$ konvergerar. Förklara hur vi får resultatet.
   b) Eftersom det rör sig om en konvergent positiv talserie, är 0 naturligtvis en undre gräns för seriens summa. Bestäm någon övre gräns för seriens summa. Gränsen får gärna vara grov, men skall vara motiverad.

2. Ytorna $F(x, y, z) = y^2 + \ln(xz - y) - x^2z - 1 = 0$ och $G(x, y, z) = \sin(x + y - z) + ze^{y-2x} - 3 = 0$ går bägge genom punkten $P_0 = (1, 2, 3)$. I vilken punkt skär tangentlinjen till ytornas skärningskurva i punkten P_0 xy-planet?



3. Den stympade pyramiden i figuren till höger begränsas av koordinatplanen, planet $z = 1$ samt planet, som går genom punkterna $(6, 0, 0), (0, 4, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Dess volym är naturligtvis 7. Beräkna dess massa, om dess densitet i punkten (x, y, z) är $\delta(x, y, z) = z^2$.

4. En cirkelskiva med radien R och följdaktligen arean $A = \pi R^2$ har på avståndet $r \leq R$ från mittpunkten area-densiteten $\delta(r) = \delta_0 \cdot \cos(\frac{\pi r}{2R})$, så area-densiteten är störst i mittpunkten och avtar sedan närmare periferin. Beräkna cirkelskivans genomsnittliga area-densitet (dvs. massan/arean).

5. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F}(x, y, z) = xyz\vec{\imath} + e^{3x+4y}\sin(5z)\vec{\jmath} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$.
   a) Beräkna $\nabla \bullet \vec{F} = div(\vec{F})$ och $\nabla(\nabla \bullet \vec{F}) = grad(div(\vec{F}))$.
   b) Beräkna $\nabla \times \vec{F} = rot(\vec{F}) = curl(\vec{F})$ och $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = rot(rot(\vec{F})) = curl(curl(\vec{F}))$.