Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

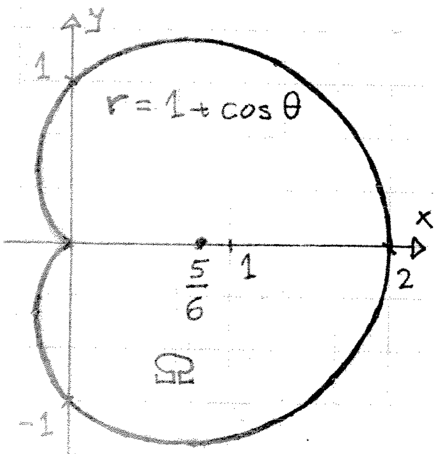
Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 30.10.2007

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

1. a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots$ konvergerar. (2p.)
   b) Eftersom det rör sig om en konvergent positiv talserie, är 0 naturligtvis en undre gräns för seriens summa. Bestäm någon övre gräns för seriens summa. Gränsen får gärna vara grov, men skall vara motiverad. (4p.)



2. I vilka punkter skär normallinjen till ytan $z = x^2y^3$ i punkten (1,2,8) koordinatplanen?

3. Bestäm maximala och minimala värdet hos funktionen $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ på ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$.

4. a) Det plana området Ω begränsas av kardioiden $r = 1+\cos\theta$. Visa att dess area är $3\pi/2$. (2p.)
   b) På grund av symmetrin finns Ω:s tyngdpunkt på x-axeln. Visa att tyngdpunkten är $(\frac{5}{6}, 0)$. (4p.)

5. a) För funktioner $f(t)$ och $g(t)$ av klass $C^1(\mathbf{R})$ gäller som bekant att $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}$. Visa den analoga formeln $\nabla \bullet (\Phi \cdot \vec{G}) = (\nabla(\Phi)) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot (\nabla \bullet \vec{G})$, dvs. $div(\Phi \cdot \vec{G}) = (grad(\Phi)) \bullet \vec{G} + \Phi \cdot div(\vec{G})$ för skalärfält $\Phi(\vec{x})$ och vektorfält $\vec{G}(\vec{x})$ av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$.
   b) För vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ i $\mathbf{R}^3$ gäller som bekant att $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$. Motsvarande behöver naturligtvis inte gälla om ∇ är inblandad. Visa att om $\vec{F}$ och $\vec{G}$ är vektorfält av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$, så är $\nabla \bullet (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \bullet \vec{G} - \vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{G})$, dvs. $div(\vec{F} \times \vec{G}) = (rot(\vec{F})) \bullet \vec{G} - \vec{F} \bullet (rot(\vec{G}))$.