Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 08.01.2007

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som föreläстes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som föreläстes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver!
Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ är en konvergent överharmonisk serie, så den har alltså en summa S. Bestäm hur stort N måste väljas för att delsumman $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$ skall approximera summan S med ett fel som är $<1/1000$.
(Med metoder från Grundkurs 3 kan man beräkna summan S exakt också: $S = \pi^4/90$. Använd gärna detta för att *kontrollera* svaret.)

2. Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbf{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp t.o.m. 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför polära koordinater r och θ via $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Då är $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r,\theta)$. Visa med hjälp av kedjeregeln att
$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

3. Bestäm minsta värdet hos funktionen $f(x,y,z) = x + 2y + 4z$ på ytan $xyz = 1$ i 1:a oktanten $x,y,z > 0$ samt punkten/punkterna, där f antar detta minimum.

4. Låt $\mathcal{H}$ vara en homogen kropp med volymen $V = \iiint_{\mathcal{H}} dV$. z-koordinaten $\bar{z}$ för dess tyngdpunkt ges som bekant av $\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{H}} z\,dV$ (och motsvarande för tyngdpunktens x- och y-koordinat).
Halvklotet $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\}$ har som bekant volymen $V = 2\pi R^3/3$. Dess tyngdpunkt finns av symmetriskäl på z-axeln. Beräkna tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z}$ med hjälp av
a) cylindriska koordinater
b) sfäriska koordinater.

5. Greens sats säger att $\oint_{\partial R} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \oint_{\partial R}(F_1dx + F_2dy) = \iint_R(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy$, då vi integrerar runt ∂R moturs. Verifiera Greens sats i fallet att vektorfältet $\vec{F}(x,y) = 2x\vec{\imath} + xy\vec{\jmath}$ och det plana området R begränsas av linjen $y = 1$ och parabeln $y = 2x^2 - 1$ som i figuren till höger.