Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

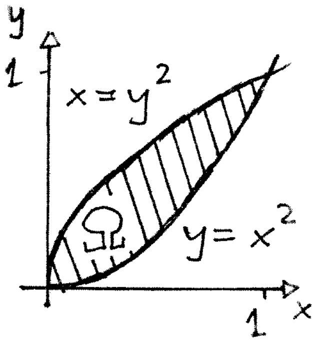
Metsalo

Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen, 28.8.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver!
Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. Vi studerar kurvan som ges av ekvationen $(x^2+y^2)^3 = 27x^2y^2$.
   a) Skriv om ekvationen med hjälp av polära koordinater (1p.)
   b) Skissa kurvan (1p.)
   c) Visa att kurvan får plats i en kvadrat med sidlängden 4 (2p.)
   d) Beräkna arean hos området innanför kurvan (2p.)

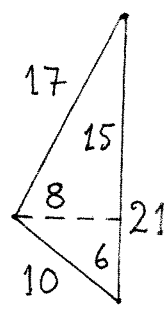
2. Det plana området Ω i figuren ovan begränsas av parablerna $x = y^2$ och $y = x^2$. Ω är alltså symmetrisk kring linjen $x = y$ och dess area är naturligtvis 1/3. I punkten (x, y) har Ω area-densiteten $\delta(x, y) = 5x + 6y^2$. Visa att trots att area-densiteten inte är symmetrisk kring linjen $x = y$, så är Ω:s tyngdpunkt (masscentrum) ändå på denna linje.

3. Visa att talserien konvergerar samt approximera dess summa med ett fel, som är <0.01. Förklara hur man kan veta att felet inte är större.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

4. Herons formel säger att en plan triangel med sidorna a, b och c har arean $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, där $s = (a+b+c)/2$ är halva omkretsen. Detta kan också skrivas
   $A(a, b, c) = \frac{1}{4}(2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4))^{1/2}$.

   En triangel med sidorna 10, 17 och 21 har alltså arean $A = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84$, vilket också kan ses om man delar upp triangeln i två rätvinkliga trianglar.

   Sidorna hos en triangel uppmättes till $10.0 \pm 0.1m, 17.0 \pm 0.3m$ respektive $21.0 \pm 0.4m$. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $A \approx 84m^2$, som osäkerheten i sidlängderna ger upphov till.

5. Bestäm de tre icke-negativa talen a, b och c sådana att deras summa är 6 och så att produkten ab^2c^3 är så stor som möjligt.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \sin(2t) = 2\sin t\cos t, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$
$\Rightarrow \cos^2 t = (1+\cos(2t))/2, \sin^2 t = (1-\cos(2t))/2$