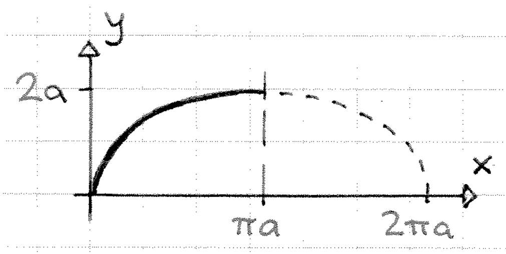
Institutionen för matematik
Tekniska högskolan Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 9.1.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. En halv båge av cykloiden ges på parameterform av $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi, a > 0$ (se figuren till höger). Dess längd är som bekant (?) $4a$. Om man går från origo (motsv. parametervärdet $t = 0$) en sträcka $2a$ längs cykloidbågen, var hamnar man då?

2. Använd någon lämplig Taylor-serie till att approximera talet $e^{-1/2}$ med ett rationellt tal så att felet till absolutbeloppet är < 0.0005. (Fickräknarens värde $e^{-1/2} \approx 0.60653066$ får gärna användas *efteråt* för kontroll.)

3. Punkten $P(-1, 1, -1)$ tillhör ellipsoiden $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$. Normallinjen till ellipsoiden i punkten P skär ellipsoiden också i en annan punkt Q. Bestäm Q.

4. Klotet $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ har mittpunkten i origo och radien R (enhet:m). I punkten $(x, y, z) \in B$ är dess densitet $\delta(x, y, z) = \delta_0 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)/R^2$, så densiteten är $0 kg/m^3$ i mittpunkten och δ_0 (enhet:kg/m^3) i klotets periferi. Beräkna klotets massa med hjälp av
a) sfäriska koordinater
b) cylindriska koordinater.

5. Antag att $g(u, v)$ är av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 = 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$. Då är även $h(x, y)$ av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$. Visa att h är också harmonisk, dvs. visa att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 = 0$ i hela xy-planet.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1, \cos^2 \phi = (1 + \cos(2\phi))/2, \sin^2 \phi = (1 - \cos(2\phi))/2.$