Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

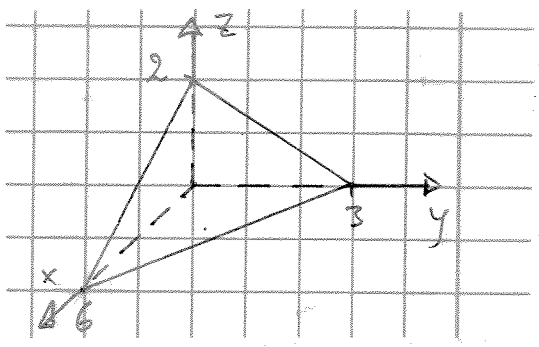
Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 3, 10.5.2010

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Bestäm massan m hos kroppen $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$ (W är alltså en fjärdedel av enhetsklotet), om densiteten i punkten $(x, y, z) \in W$ ges av $f(x, y, z) = xy$. (Svar: $m = 2/15$.)



2. Bestäm massan m hos den triangulära plåtskivan $S = \{(x, y, z] \in \mathbf{R}^3 | x + 2y + 3z = 6, x, y, z \geq 0\}$ (se figuren till höger), om area-densiteten i punkten $(x, y, z) \in S$ ges av $g(x, y, z) = x + y + z$. (Svar: $m = 11\sqrt{14}$.)
3. $h(x, y, z) = \arctan(x/y) + \arctan(y/z) + \arctan(z/x)$ är definierad i första oktanten $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x, y, z > 0\}$. Visa att h är harmonisk i sin definitionsmängd, dvs. att $div(grad(h)) = \nabla \bullet (\nabla h) \equiv 0$.
4. Visa att differentialekvationen $(y^3 e^x - x)dx + 3y^2(e^x + 1)dy = 0$ (eller ekvivalent: $y^3 e^x - x + 3y^2(e^x + 1)\frac{dy}{dx} = 0$) är exakt samt bestäm lösningen $y(x)$, som satisfierar begynnelsevillkoret $y(0) = 2$.

Glöm inte att fylla i kursutvärderingen.
Tack för den gångna terminen. Ha en trevlig sommar. Georg M.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi, \sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$
$\Rightarrow \cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\phi)), \sin^2\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\phi))$.
$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C, \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C, \int \sqrt{t^2 + a^2}dt = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) + C.$