Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 3, 2008-05-07

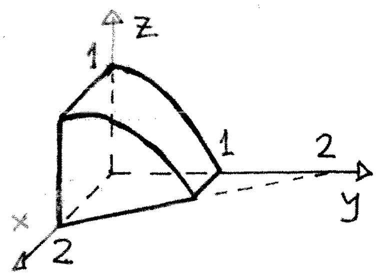
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika uppgifter kan ge olika antal poäng!
Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. $\Phi(x,y,z) = e^{xy} + \cos(yz)$ och $\vec{G}(x,y,z) = xz\vec{\imath} + \ln(1+y^2)\vec{\jmath} + \frac{xy}{z}\vec{k}$. Beräkna a) $grad(\Phi) = \nabla\Phi$, b) $div(\vec{G}) = \nabla \bullet \vec{G}$ och c) $rot(\vec{G}) = curl(\vec{G}) = \nabla \times \vec{G}$. (1p.+1p.+1p.)

2. Vid en variabelsubstitution $\vec{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\vec{\imath} + y(u,v,w)\vec{\jmath} + z(u,v,w)\vec{k}$ i en trippelintegral ersätts volymselementet $dV = dxdydz$ som bekant med $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw$, där $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ är transformationens Jacobian (Jacobian-matrisens determinant) och kan betraktas som en förstoringsfaktor.
   Visa att vid övergång till cylindriska koordinater r, θ och z via $x(r,\theta,z) = r\cos\theta$, $y(r,\theta,z) = r\sin\theta$, $z(r,\theta,z) = z$ blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$. (Därför ersätts $dV = dxdydz$ inte med $drd\theta dz$ utan med $rdrd\theta dz$ vid övergång till cylindriska koordinater.) (3p.)

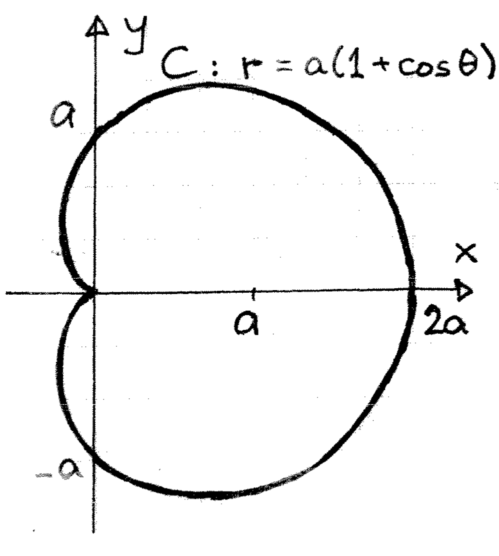
3. Beräkna $I = \iiint_D xzdV$, då D är området i 1:a oktanten (där $x, y, z \geq 0$), som begränsas av koordinatplanen, planet $x+y=2$ samt den paraboliska cylindern $y^2+z=1$ (se figuren till höger). (Svar: $I \approx 0.3857$) (6p.)



4. Beräkna arean hos den delen av sadelytan $z = 2xy$, som finns innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=3$. (Svar: $A \approx 24$) (6p.)

5. Kardioidkurvan $C: r = a(1+\cos\theta), a > 0$ (given i polära koordinater; se figuren nedan) har av symmetriskäl tyngdpunkten på x-axeln. Bestäm tyngdpunktens x-koordinat

$$\bar{x} = \frac{\int_C xds}{\int_C ds} \qquad (6p.)$$



Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$,
$\cos^2\phi = (1+\cos(2\phi))/2$,
$\sin^2\phi = (1-\cos(2\phi))/2$,
$\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$,
$\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 1 - 2\sin^2\phi$.