Institutionen för matematik
Tekniska högskolan
Metsalo

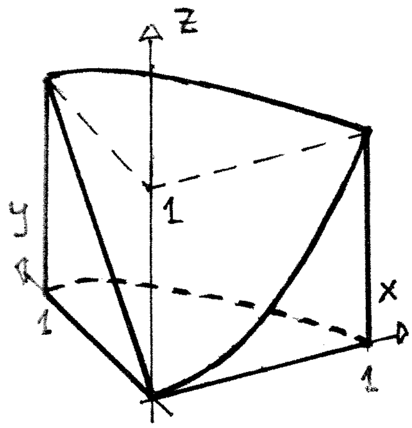
Mat-1.452 / Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr. 3, 8.5.2006

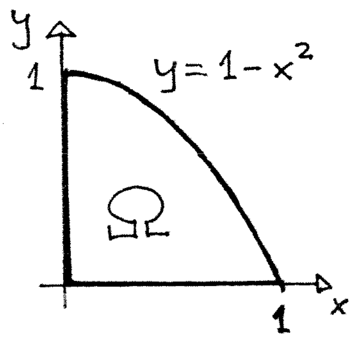
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.452 (gamla Grundkurs 2, som förelästes sista gången våren -05; 6sv) eller Mat-1.1520 (nya Grundkurs 2, som förelästes första gången våren -06; 10sp) som ni skriver!
Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
På förekommen anledning varnas för oavsiktliga tryckfel i texten.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. a) $\Phi(x,y,z) = xe^y + z^2\cos x$. Beräkna $\nabla\Phi = \text{grad}(\Phi)$, $\nabla \bullet (\nabla\Phi) = \text{div}(\text{grad}(\Phi))$ och $\nabla \times (\nabla\Phi) = \text{rot}(\text{grad}(\Phi)) = \text{curl}(\text{grad}(\Phi))$.
   b) $\vec{G}(x,y,z) = x\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath} + xz^3\vec{k}$. Beräkna $\nabla \bullet \vec{G} = \text{div}(\vec{G})$, $\nabla \times \vec{G} = \text{rot}(\vec{G}) = \text{curl}(\vec{G})$ och $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{G}) = \text{div}(\text{rot}(\vec{G})) = \text{div}(\text{curl}(\vec{G}))$.



2. Kroppen W ligger i 1:a oktanten i xyz-rummet och begränsas av koordinatplanen, den paraboliska cylindern $y = 1 - x^2$ samt den paraboliska cylindern $z = x^2 + y$ (se den övre figuren till höger). W har alltså som botten området Ω i 1:a kvadranten i xy-planet, som begränsas av koordinataxlarna och parabeln $y = 1 - x^2$ (se den nedre figuren). I punkten $(x,y,z) \in W$ är kroppens densitet $\delta(x,y,z) = x$ (godtyckliga enheter). Bestäm kroppens massa.



3. Ytan S är den delen av den paraboliska cylindern $z = x^2 + y$, som har projektionen Ω på xy-planet. (S är alltså den övre begränsningsytan till kroppen i föregående uppgift.) I punkten $(x,y,z) \in S$ är ytans area-densitet $\delta(x,y,z) = x$ (godtyckliga enheter). Bestäm ytans massa.

4. a) Visa att differentialekvationen $(2y + xy)dx + 2xdy = 0$ (som också kan skrivas på formen $2y(x) + x \cdot y(x) + 2x \cdot y'(x) = 0$) inte är exakt, men att den kan göras exakt genom att multiplicera med den integrerande faktorn $\frac{1}{xy}$.
   b) Bestäm lösningen till differentialekvationen ovan, som satisfierar begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ antingen genom att göra differentialekvationen exakt eller alternativt genom att utnyttja att den är separabel eller linjär.

I morgon är det tisdag. Då kan detta mellanförhör diskuteras i Stavans kl. 13:00-13:30.
Ha en trevlig sommar! Georg M.