Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

# Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

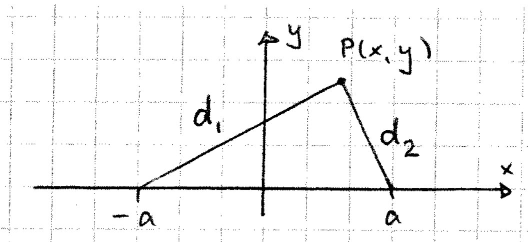
## Mellanförhör nr 1, 23.2.2010

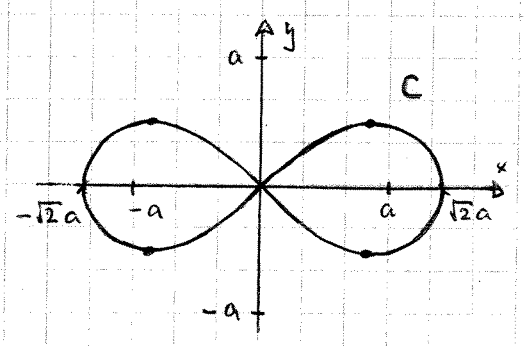
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga tentamensvakten!

1. Vi studerar den positiva talserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{24}} + \ldots$.
   a) Visa att serien konvergerar och alltså har en summa $S$.
   b) Eftersom det rör sig om en positiv talserie, är 0 naturligtvis en undre gräns för seriens summa $S$. Bestäm någon övre gräns för $S$. Gränsen får vara grov, men skall vara motiverad.

2. Vi studerar rymdkurvan $\vec{r}(t) = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$.
   a) I vilken punkt skär tangentlinjen till rymdkurvan i punkten (3,3,2) $xz$-planet?
   b) Bestäm längden hos rymdkurvan från origo till punkten (6,12,16).




3. Kurvan $C$ består av alla punkter $P(x, y)$ i $xy$-planet med egenskapen att om $d_1$ är avståndet från $P$ till punkten $(-a, 0)$ och $d_2$ är avståndet från $P$ till punkten $(a, 0)$, så är $d_1 \cdot d_2 = a^2 (\Leftrightarrow d_1^2 \cdot d_2^2 = a^4)$. Observera att $C$ är symmetrisk med avseende på koordinataxlarna och att origo tillhör $C$. Lite mera arbete ger att även punkterna $(\pm\sqrt{2}a, 0)$ tillhör $C$.
   a) Visa att $C$ ges på polär form av $(r(\theta))^2 = 2a^2\cos(2\theta)$.
   b) $C$ är skissad i den nedre figuren till höger. Den kallas för en *lemniskata* och är oändlighetstecknets förebild. Beräkna arean innanför lemniskatan (utnyttja gärna symmetrin). Formeln i a)-delen får användas fritt, även om man inte löst a)-delen.
   c) Lemniskatan har horisontell tangent i 4 punkter, markerade i figuren. Visa att $y = \pm a/2$ i dessa 4 punkter.

4. Bestäm lösningen till differentialekvationen $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Gott råd: inför en hjälpfunktion $z(x) = y'(x)$ och lös först differentialekvationen, som $z(x)$ satisfierar.

Nyttiga (?) formler:
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1,$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta), \sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\Rightarrow \cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi, \sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$
$\Rightarrow \cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\phi)), \sin^2\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\phi)).$