Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

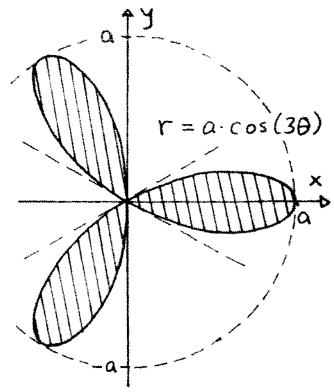
Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 1, 20.2.2008

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika uppgifter kan ge olika antal poäng!
Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

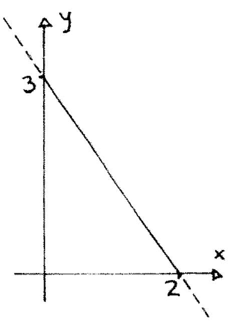
1. Om f och g är differentierbara reellvärda funktioner, definierade i $\mathbf{R}$, så gäller som bekant att $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. Låt nu $\bar{u}(t) = u_1(t)\bar{\imath} + u_2(t)\bar{\jmath} + u_3(t)\bar{k}$ och $\bar{v}(t) = v_1(t)\bar{\imath} + v_2(t)\bar{\jmath} + v_3(t)\bar{k}$ vara 3-vektorvärda differentierbara funktioner, definierade i $\mathbf{R}$. Visa följande analogi till deriveringsformeln ovan:
$(\bar{u} \times \bar{v})'(t) = \bar{u}'(t) \times \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \times \bar{v}'(t)$. (3p.)



2. Beräkna arean hos treklövern $r(\theta) = a \cdot \cos(3\theta)$ till höger. (3p.)

3. Avgör om serien konvergerar eller divergerar. Motivera svaret. (Och som motivering räcker det inte att bara nämna namnet på något konvergens-kriterium, som kanske har, kanske saknar relevans i sammanhanget!) (2p.+2p.+2p.)

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$



4. $\bar{r}(t) = 2\cos^2(t)\bar{\imath} + 3\sin^2(t)\bar{\jmath}$ ger den delen av linjen $x/2 + y/3 = 1$ (dvs. linjen $3x + 2y = 6$), som finns i 1:a kvadranten $x, y \geq 0$. Använd *denna parameterframställning* för att beräkna arean hos den koniska ytan som uppstår då detta linjesegment roterar kring x-axeln. (De som minns formeln för arean hos konens mantelyta från skolan eller hur man beräknar arean hos en yta, som uppstår då en kurva av typ $y = f(x)$ roterar kring en koordinataxel från Grundkurs 1 kan gärna använda detta *efteråt* för kontroll.) (6p.)

5. Krökningen $\kappa(t)$ hos en rymdkurva $\bar{r}(t)$ ges som bekant av $\kappa(t) = |\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|/|\bar{r}'(t)|^3$ och krökningsradien $\rho(t)$ av $\rho(t) = 1/\kappa(t)$, där dessa uttryck är definierade. Bestäm den punkten på kurvan $y = e^x$ i xy-planet, där krökningsradien är minst samt krökningsradien i den punkten. (6p.)
Gott råd: En positiv funktion antar maximum/minimum i samma punkt där dess kvadrat antar maximum/minimum.

Beundra månförmörkelsen tidigt i morgon! De strategiska tidena är 03:43, 05:01 (totala fasen börjar), 05:26 (totala fasen djupast), 05:52 (totala fasen upphör) och 07:09 (förmörkelsen upphör).

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \cos^2\phi = (1 + \cos(2\phi))/2, \sin^2\phi = (1 - \cos(2\phi))/2, \lim_{\phi\to 0} \frac{\sin\phi}{\phi} = 1,$
$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v), \cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v).$