

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 1, 20.2.2007

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.

Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Kurvan C_1 består av alla punkter $P(x, y)$ i xy -planet sådana att avståndet från P till punkten $(3, 0)$ är hälften av avståndet från P till y -axeln.

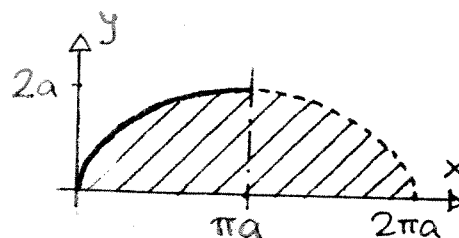
Kurvan C_2 består av alla punkter $Q(x, y)$ i xy -planet sådana att avståndet från Q till punkten $(3, 0)$ är hälften av avståndet från Q till origo.

a) C_1 är som bekant en ellips. Skriv dess ekvation på standardformen $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ samt bestäm dess mittpunkt och excentricitet.

b) Bestäm C_2 's ekvation samt punkterna, som är på bägge kurvorna.

2. En halv båge av cykloiden ges på parameterform av $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, $a > 0$

(se figuren till höger). Då denna halva cykloidbåge roterar kring den vertikala linjen $x = \pi a$, uppstår en rotationssymmetrisk yta. Under denna yta finns en rotationssymmetrisk kropp, som påminner om gulan hos ett stekt ägg. (I figuren är kroppens tvärsnitt genom symmetriaxeln skuggat.) Vi vill beräkna volymen hos denna kropp. Sätt upp integralen, som ger denna volym på en sådan form, att den enkelt kan beräknas mha. t.ex. Mathematica. Själva volymen behöver inte beräknas. ($V \approx 38a^3$)



3. a) Förklara hur man med hjälp av *integralkriteriet* (eng: the integral test) ibland kan avgöra, huruvida en positiv talserie konvergerar eller divergerar. (Vilka krav skall vara uppfyllda? När kan man dra några slutsatser? Vilka är då dessa slutsatser?) Kriteriet behöver inte visas.

b) Använd integralkriteriet till att undersöka konvergensen hos talserien $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

4. Beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^2 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ genom att utveckla integranden i form av en Maclaurin-serie (Taylor-serie utvecklad i origo) och medtaga endast de tre första termerna. Uppskatta också felet i approximationen.