Litet supplement om exakta differentialekvationer och ortogonala kurvskaror (se även Gk1).

Givet en C^2-funktion $F(x,y)$ av två variabler kan vi bestämma en ordinär differential-ekvation (ODE), vars lösningskurvor är F:s nivåkurvor, dvs. kurvorna $F(x,y) = C$:

Ansätt, att y är en (implicit) funktion av x och derivera VL och HL med avseende på x:

$$\frac{d}{dx}(F(x,y(x))) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(C) = 0.$$

Om vi betecknar $\partial F/\partial x$ med $M(x,y)$ och $\partial F/\partial y$ med $N(x,y)$ och övergår till differentialer, kan vi skriva denna ODE på formen

$$\underline{M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0},$$

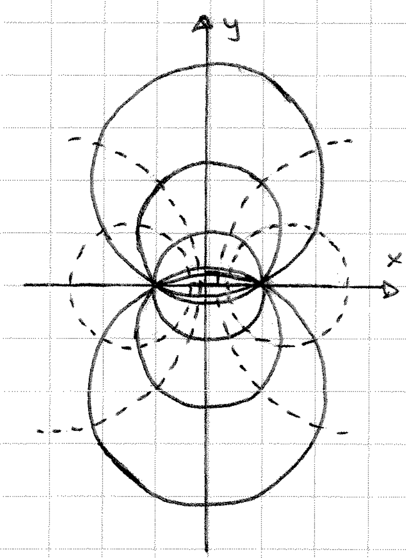
där $\partial M/\partial y = \partial^2 F/\partial y\partial x = \partial^2 F/\partial x\partial y = \partial N/\partial x$.

En differentialekvation, som kan skrivas som $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$ (eller ekvivalent som $M(x,y) + N(x,y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$), där $\underline{\partial M/\partial y = \partial N/\partial x}$, kallas för en <u>exakt</u> differentialekvation. Dess lösningskurvor är <u>nivåkurvorna</u> till en funktion $F(x,y)$ sådan att $\partial F/\partial x = M$, $\partial F/\partial y = N$.

Denna exakta ODE kan också skrivas på formen $\frac{dy}{dx} = y'(x) = -M(x,y)/N(x,y) = k_1(x,y)$, vilket gör det möjligt att rita <u>ett fält av tangentlinje-segment</u> för lösningarna till diff.ekvationen.

Om vi nu sätter upp en <u>ny</u> ODE $y'(x) = k_2(x,y)$, där $k_1(x,y)\cdot k_2(x,y) = -1$ i varje punkt där $k_1(x,y) \neq 0$, kommer lösningskurvorna till denna nya ODE alltid att skära den ursprungliga kurvskaran $F(x,y) = C$ ortogonalt. Då har vi bildat <u>ortogonala kurvskaran</u> till skaran av nivåkurvor för funktionen $F(x,y)$.

Ex: Vi bestämmer ortogonala kurvskaran till skaran av cirklar genom punkterna $(\pm a, 0)$ i figuren t.h. Diff. ekvationen för den ortogonala kurvskaran är inte exakt (och inte heller linjär eller separabel), men kan göras exakt genom att multiplicera med en integrerande faktor $\mu = \mu(x)$, som inte beror på y.



Cirklarna: vår cirkelskara har mittpunkterna på y-axeln och cirkeln med mittpunkten $(0, C)$ har radien $\sqrt{a^2+C^2}$ och ekvationen $x^2+(y-C)^2 = a^2+C^2$, så cirkelskarans ekvation kan skrivas $F(x,y) = (x^2+y^2-a^2)/2y = C$. Genom att ansätta, att $y = y(x)$ och derivera VL & HL map. x får vi $\frac{d}{dx}((x^2+(y(x))^2-a^2)/2y(x)) = \frac{1}{2}\left[2xy-(x^2-y^2-a^2)\cdot\frac{dy}{dx}\right]/y^2 = \frac{d}{dx}(C) = 0$ eller $\frac{dy}{dx} = y' = 2xy/(x^2-y^2-a^2) = k_1(x,y)$. Denna ODE har alltså som lösningskurvor cirklarna i cirkelskaran.

Ortogonala kurvskaran ges av en annan ODE: $\frac{dy}{dx} = y' = k_2(x,y) = -1/k_1(x,y) = (a^2-x^2+y^2)/2xy$, som kan skrivas om mha. differentialer på formen $(a^2-x^2+y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = M\cdot dx + N\cdot dy = 0$.
$\partial M/\partial y = 2y \neq \partial N/\partial x = -2y$, så denna ODE är inte exakt.
Ansats: Integrerande faktor $\mu(x)$ (oberoende av y) $\mu(x)\cdot(a^2-x^2+y^2)\cdot dx - \mu(x)\cdot 2xy\cdot dy = 0$. Vi vill få $\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)\cdot(a^2-x^2+y^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(-\mu(x)\cdot 2xy)$, dvs. att denna nya ODE (efter multiplikation med $\mu(x)$) är exakt. Detta ger $2y\cdot\mu(x) = -2xy\cdot\mu'(x) - 2y\cdot\mu(x)$, dvs. att $x\cdot\mu'(x)+2\mu(x) = 0$. Detta är en 1:a ordningens linjär, homogen ODE för $\mu(x)$ och $\mu(x) = 1/x^2$ är en lösning. Nu får vi en exakt ODE för den ortogonala kurvskaran: $\frac{1}{x^2}\cdot(a^2-x^2+y^2)\cdot dx - \frac{1}{x^2}\cdot 2xy\,dy = M_1\cdot dx + N_1\cdot dy = 0$.
$\partial M_1/\partial y = 2y/x^2 = \partial N_1/\partial x$, så vi har exakthet!
Lösningskurvorna ges som $G(x,y) = C$, där $\frac{\partial G}{\partial x} = M_1 = \frac{1}{x^2}(a^2-x^2+y^2)$ och $\frac{\partial G}{\partial y} = N_1 = -\frac{1}{x^2}\cdot 2xy$, vilket ger att $G(x,y) = -\frac{a^2}{x} - x - \frac{y^2}{x}$ (t.ex.). Nivåkurvorna för $G(x,y)$, dvs. den ortogonala kurvskaran, kan också skrivas som $(x+\frac{C}{2})^2 + y^2 = \frac{C^2}{4} - a^2$, vilket också ger en cirkelskara (streckade i figuren ovan).