Gk2 i Matematik, taveluppg. må v18/10 Metsalo

3:e mellanförhöret äger rum må 10.5. kl. 16:30 – 19:30 och omfattar kap. 14 – 16 samt kap. 17/appendix IV (uppl. 4, 6 och 7/uppl. 5) om differentialekvationer i Adams. Fr 21.5. kl. 9–13 är det turbotentamen, då det går att antingen ta om ett mellanförhör (3h) eller skriva sluttentamen (4h). Till turbotentamen måste man förhandsanmäla sig.

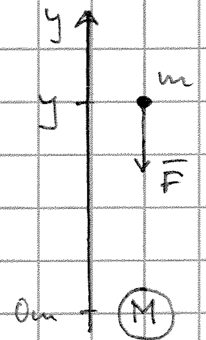
Räkneövningen fr 30.4 är inställd. Sista räkneövningen äger rum må 3.5. (uppgifterna finns nedan) och sista räknestugan to 29.4. (efter datorövningen). De sista inlämningsuppgifterna (på hemtalslappen för v17) kan lämnas i kuvertet utanför U337b senast to 6.5. kl. 12:30. Sista föreläsningen är to 6.5. och föreläsningarna v18 används i huvudsak till besvarande av frågor och repetition.

Fyll i kursutvärderingen efter kursens slut!

D0a) Bestäm ortogonala kurvskaran till kurvskaran $y = e^{2x} + C$.

b) Bestäm ortogonala kurvskaran till kurvskaran $y = Ce^{3x}$.

(Skissa gärna kurvskarorna för kontroll.)



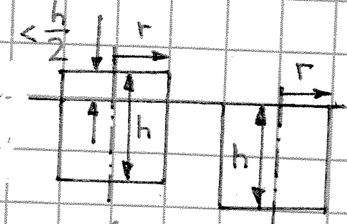
D1) Ett föremål med massan m, som befinner sig på avst. y från jordens mittpunkt, utsätts enligt Newtons gravitationslag och må v16 för kraften $F = -GMm/y^2$, där G är universella gravitationskonstanten (betecknad k i Adams) och M är jordens massa. På jordytan är $F = -mg = -GMm/R^2$, där R är jordens radie, så $GM = gR^2$.

Höjden $y(t)$ hos ett föremål, som skjuts upp från jordytan, satisfierar alltså diff.ekvationen $my''(t) = -GMm/(y(t))^2$ eller $y''(t) = -gR^2/(y(t))^2$, om vi bortser från luftmotstånd, månens dragningskraft &c. Denna DE har en lösning $y(t) = a\cdot t^r$, där a och r är positiva konstanter och $r < 1$. Denna lösning svarar mot att föremålet flyger bort mot oändligheten (ty $r > 0$), men allt långsammare (ty $r < 1$).

v.g. vänd

D1 (forts.) Bestäm konstanterna a och r och visa att för att få denna lösning måste uppskjutningshastigheten vid jordytan (där $y = R$, vilket inte behöver svara mot $t = 0$ s; vi behöver inte starta vår klocka i uppskjutningsögonblicket) vara $y' = \sqrt{2gR} = \sqrt{2GM/R}$ (flykthastigheten).

D2) Bestäm mha. Archimedes' princip (D3 v17) och 2:a ordningens linjära ODE från kap. 3.7 (GkL) svängningstiden hos en cylindrisk träkloss med $\delta_T > \delta_V/2$ (så mer än halva klossen är under vatten vid vila) om klossen trycks ned i vattnet och släpps, så den börjar guppa, om det inte förekommer någon dämpning (vilket naturligtvis är rätt orealistiskt i detta sammanhang).



D3) Låt $h(r)$ vara en deriverbar funktion av en variabel, definierad i $]0,\infty[$. Låt $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ vara positionsvektorfältet i $\mathbb{R}^3$ och $r = |\bar{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ (betecknad ρ i sfäriska koordinater).

$\bar{H}(x,y,z) = h(r)\cdot\bar{r} = h((x^2+y^2+z^2)^{1/2})\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$ är då ett vektorfält definierat i $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} = \mathbb{R}^3\setminus\{\bar{0}\}$.

a) Visa att för att $\bar{H}$ skall vara källfritt i $\mathbb{R}^3\setminus\{\bar{0}\}$ (dvs. $\operatorname{div}(\bar{H}) = \nabla\bullet\bar{H} \equiv 0$), måste h satisfiera differentialekvationen $r\cdot h'(r) + 3h(r) = 0$.

b) Bestäm allmänna lösningen till denna diff.ekvation.

c) Visa att om h satisfierar denna diff.ekvation så är $\bar{H}$ även konservativt i $\mathbb{R}^3\setminus\{\bar{0}\}$ genom att bestämma en skalär potential $\Phi(x,y,z)$ till $\bar{H}(x,y,z)$ i $\mathbb{R}^3\setminus\{\bar{0}\}$ sådan att $\operatorname{grad}(\Phi) = \nabla\Phi = \bar{H}$.

En hjärtligt Glada Vappen på er alla (som det tycks heta på finlandssvenska) och trevlig sommar!
Tack för den gångna terminen. Georg M.