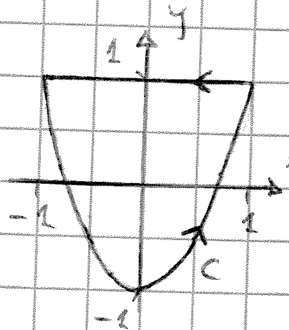
Gk2 i Matematik, hemtal v17/10 Metsalo

Räkneövningen fr 30.4. är inställd pga HMCG 2^e. Sista räkneövningen är må 3.5. och sista föreläsningen to 6.5. To 29.4 har vi 3:e datorövningen. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.

D0 a) 16.1.10 (Jag betecknar vektorfältet $\hat{e}_r$) och
16.1.11 (Jag betecknar vektorfältet $\hat{e}_\theta$).

b) Låt $\bar{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vara en konstant vektor och $\bar{r}$ positionsvektorfältet $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Förenkla uttrycken: $\nabla(\bar{u}\cdot\bar{r})$, $\nabla(\bar{r}\cdot\bar{r})$, $(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{r}$, $\nabla\cdot(\bar{u}\times\bar{r})$, $\nabla\times(\bar{u}\times\bar{r})$, $(\bar{u}\times\nabla)\times\bar{r}$. (Observera att $\bar{r}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\bar{r}$ och $\bar{u}\times\nabla \neq -(\nabla\times\bar{u})$.)

D1) Beräkna kurvintegralen $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$, där $\bar{F}(x,y) = 2x\hat{i} + xy\hat{j}$ och C är den slutna kurvan, som går från $(1,1)$ till $(-1,1)$ längs linjen $y=1$ och därefter tillbaka till $(1,1)$ längs parabeln $y = 2x^2 - 1$



a) direkt som en kurvintegral (bryt upp integralen i två delar).

b) genom att omvandla den till en ytintegral mha. Greens sats.

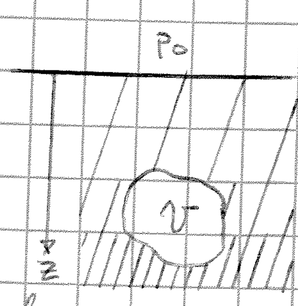
D2) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial S} \bar{v}\cdot d\bar{r}$ av vektorfältet $\bar{v}(x,y,z) = 2y\hat{i} + x^2\hat{j} + 3x\hat{k}$ längs randkurvan ∂S till halvsfären $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att omvandla den till en ytintegral över halvsfären S mha. Stokes' sats.

c) genom att omvandla den till en ytintegral över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 16,\ z = 0$ (som ju har samma randkurva som halvsfären) mha. Stokes' sats.

D3) I en vätska med den variabla densiteten $\delta(z)$ (som förmodligen ökar med djupet z) ges trycket på djupet z av $p(z) = p_0 + \int_0^z g\cdot\delta(\xi)\,d\xi$, där p_0 är lufttrycket och g tyngdkraftsaccelerationen.



v.g. vänd

D3 (forts.) Om en kropp V nedsänkes i vätskan, kommer vätsketrycket att påverka kroppen med en kraft. Använd Gauss' universalsats (vektorversionen av divergenssatsen) till att härleda

__Archimedes' princip:__ Lyftkraften, varmed en vätska påverkar en i den nedsänkt kropp är lika med den undanträngda vätskans tyngd.

Gott råd: vektorvärda integraler kan integreras komponentvis.

Nedan följer de sista inlämningsuppgifterna för denna kurs:

I1 a) $\Phi(x,y,z) = xe^y + z^2\cos x$. Beräkna $\nabla\Phi = \mathrm{grad}(\Phi)$, $\nabla\cdot(\nabla\Phi) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(\Phi))$ och $\nabla\times(\nabla\Phi) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\Phi)) = \mathrm{curl}(\mathrm{grad}(\Phi))$.

b) $\bar{G}(x,y,z) = x\hat{i} + xy^2\hat{j} + xz^3\hat{k}$. Beräkna $\nabla\cdot\bar{G} = \mathrm{div}(\bar{G})$, $\nabla\times\bar{G} = \mathrm{rot}(\bar{G}) = \mathrm{curl}(\bar{G})$ och $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{G}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}(\bar{G})) = \mathrm{div}(\mathrm{curl}(\bar{G}))$.

I2) Beräkna flödet $\oint\!\!\oint_S (\bar{F}\cdot\hat{N})\,dS$ av vektorfältet $\bar{F}(x,y,z) = \hat{i} + y\hat{j} + z^2\hat{k}$ ut genom sfären $S: x^2+y^2+z^2 = 4$

a) direkt som en ytintegral

b) genom att omvandla den till en rymdintegral mha. Gauss' sats (divergenssatsen).

I3) Nivåkurvorna för funktionen $F(x,y) = x^2 + 3y^2$ är en skara ellipser. Använd metoderna i supplementet om differentialekvationer på insidan av hemtalslappen för v15 för att bestämma ortogonala kurvskaran till denna ellipsskara.

I4) Från uppgiften i början av övningen må v16 fick vi att gravitationskraften utanför ett sfäriskt skal är densamma som om skalet skulle ersättas med en punktmassa (med samma massa) i dess mittpunkt, men att det i hålrummet i ett sfäriskt skal

(forts.)

I4 (forts.) inte finns någon gravitationskraft. Ur detta får vi även tyngdkraftsaccelerationen inuti ett homogent klot.
Antag att jorden är homogen och borra ett hål längs axeln, i vilket vi släpper ned ett föremål med massan m. Beräkna m.h.a. teorin för 2:a ordningens linjära ODE från kap. 3.7 (Gk1) hur lång tid det tar innan föremålet återvänder.
Bortse från luftmotstånd, använd att $g \approx 9{,}81\ m/s^2$ vid jordytan och att $2\pi R \approx 40.000$ km för jorden.
(Detta är egentligen ett specialfall av uppg. 8C7 i Adams.)

I5a) Visa att $y_1(x) = (1+x^2)^{1/2}$ är en lösning till
(*) $(1+x^2)\cdot y''(x) + x\cdot y'(x) - y(x) = 0$.

b) Eftersom (*) är en linjär, homogen ODE, är även $C\cdot y_1(x) = C\cdot(1+x^2)^{1/2}$ en lösning till (*) för varje konstant C. Men (*) har även en annan, linjärt oberoende lösning, som kan bestämmas m.h.a.
d'Alemberts metod: Ansätt att (*) har en annan lösning $y_2(x) = c(x)\cdot y_1(x)$ där $c(x)$ är en (än så länge okänd) funktion. Då vi sätter in denna ansatz i (*), får vi en 1:a ordningens ODE för $v(x) = c'(x)$.
Bestäm denna diffekvation för $v(x)$.

c) Lös denna diffekvation för $v(x) = c'(x)$, bestäm m. detta $c(x)$ och därefter $y_2(x) = c(x)\cdot y_1(x)$.
Kontrollera slutligen, att $y_2(x)$ faktiskt är en lösning till (*).