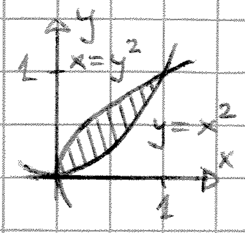
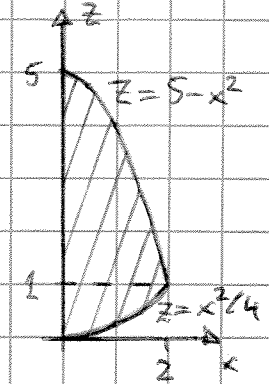
Gk 2 i Matematik, hemtal v15/10 Metsalo

På insidan av detta blad finns ett supplement om differentialekvationer.



Må: D0) Det skuggade området i fig. begränsas av parablerna $x=y^2$ och $y=x^2$ och har i punkten (x,y) area-densiteten $\delta(x,y)=5x+6y^2$. Visa att dess tyngdpunkt finns på linjen $x=y$.



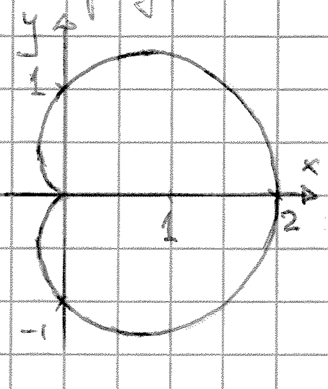
D1a) Bestäm krökningsradien hos parabeln $z=x^2/4$ i origo (kap. 11.5)

b) Det skuggade området t.h. roterar kring z-axeln. Bestäm tyngdpunkten hos den rotationssymmetriska kroppen, som uppstår.

D2) (En utmaning?) Laplace-konvolutan (eller faltningen) $f*g$ av två funktioner f och g, definierade och kontinuerliga i $[0,\infty[$ ges av $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau$.

a) Visa att konvolutan är kommutativ, dvs. att $f*g=g*f$.

b) Visa att konvolutan är associativ, dvs. att $(f*g)*h = f*(g*h)$.



D3) Bestäm tyngdpunkten hos kardioidkurvan C: $r=1+\cos\theta$ (uttryckt i pol. koord). Jämför med uppg. D3 i fredags. Då studerade vi ett plant område, nu studerar vi en kurva.

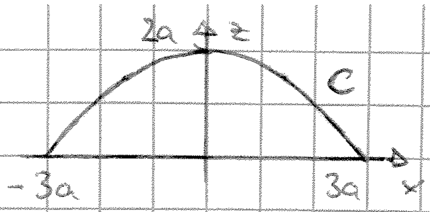
Fr: D4) Beräkna kurvintegralen $W=\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$, där C är den räta linjen från origo till $(1,2,3)$ och $\bar{F}(x,y,z) = (e^z+1/(1+x^2))\hat{i} + 2yz\hat{j} + (xe^z+y^2)\hat{k}$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att visa att $\bar{F}$ är konservativt, bestämma $\bar{F}$:s potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att $\nabla\Phi=\bar{F}$ och beräkna W mha. potentialfunktionen.

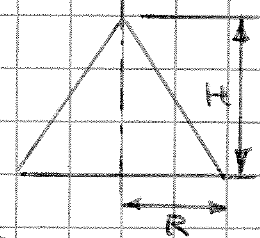
v.g. vänd

D5a) Den plana kurvan $C=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=2a(1-(x/3a)^2),\ -3a\le x\le 3a\}$ har i punkten $(x,z)\in C$ längddensiteten $\delta(x,z)=\delta_0\cdot z/2a$. Bestäm C:s längd, massa och tyngdpunkt. Låt gärna Mathematica göra slavgöret.
(Jämför med uppg. I1 & I4, v13–14. Då studerade vi ett plant område och en kropp, nu studerar vi en kurva.)

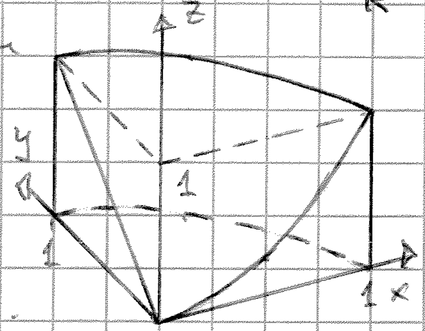


b) Bestäm massan hos rotationsparaboloiden $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le(3a)^2,\ z=2a(1-(x^2+y^2)/(3a)^2)\}$, om area-densiteten är $\delta(x,y,z)=\delta_0\cdot z/2a$.
(Nu studerar vi en (krökt) yta.)

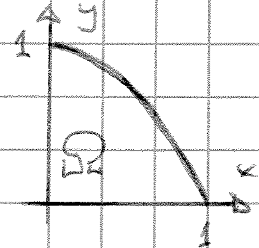
I1) Konen t.h. har radien R, höjden H och den konstanta densiteten δ_0. Beräkna dess tröghetsmoment med avseende på symm.axeln.



I2a) Kroppen i fig. t.h. ligger i 1:a oktanten och begränsas av koord.planen samt de paraboliska cylindrarna $z=x^2+y$ och $y=1-x^2$. Dess botten är det plana området Ω.
Kroppens densitet är $\delta(x,y,z)=xz$.
Bestäm kroppens massa.



b) Ytan S är den övre begränsningsytan till kroppen i a)-delen. Dess area-densitet är $\delta(x,y,z)=xz$. Bestäm ytans massa.



I3a) 15.1.3 b) 15.1.5 c) 15.1.6

I4) $\bar{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}=u\cdot\cos v\,\hat{i}+u\cdot\sin v\,\hat{j}+8v\hat{k}$, $u\in[6,15]$, $v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ger en yta på parameterform, nämligen en helicoid (en spiralramp). Beräkna dess area (och rita den gärna mha. ParametricPlot3D).

I5) 15.6.7 (Gott råd: parametrisera ytan)