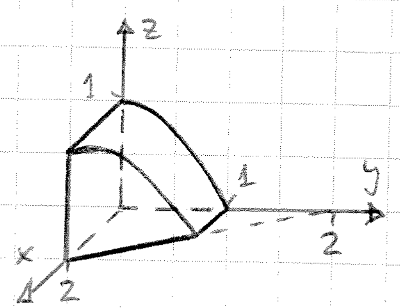
Gk2 i Matematik, hemtal v13-14/10 Metsalo

På insidan finns en del <u>integralsatser</u> från kap-16 och 1:a bladet i Adams. De behandlas mot slutet av terminen.

Må (före påsklovet): Räkneövningen används i första hand till att <u>besvara frågor</u> inför tisdagens <u>mellanförhör</u>. Om det finns tid över, tar vi några exempel på multipla integraler.

Fr (efter påsklovet): D0 är avsedd som en <u>uppvärmning</u> och behandlas endast om det framställs önskemål om detta.

D0) Beräkna volymen hos kroppen till höger, som begränsas av koordinatplanen, planet $x+y=2$ samt den paraboliska cylindern $y^2+z=1$.



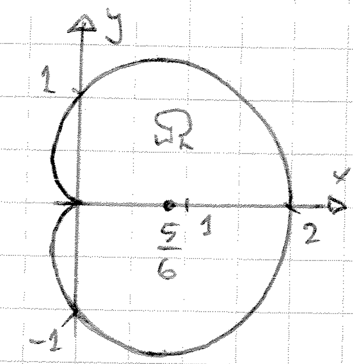
D1) (En utmaning!) Beräkna volymen hos kroppen innanför de tre räta cirkulära cylindrarna $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ och $z^2+x^2=a^2$. Observera att kroppen <u>inte</u> är ett klot. Goda råd: utnyttja symmetrin och damma av integrationstekniken från Gk 1.

D2) Vi studerar ytorna i ex 5, kap. 14.4 (figuren har bara en fjärdedel av ytorna). Deras skärningskurva är Vivianis kurva, bekant från I1, v7 och datorövning 1.

a) Beräkna arean hos den delen av den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$, som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$. Gott råd: använd rektangulära koordinater.

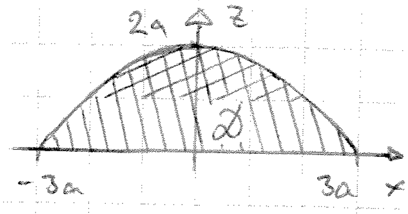
b) Beräkna arean hos den delen av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, som ligger innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$ (ytan kallas för Vivianis fönster). Gott råd: använd polära koordinater.

D3) Det plana området Ω till höger är homogent (konstant areadensitet) och begränsas av kardioiden $r=1+\cos\theta$. Visa att dess tyngdpunkt är $(5/6, 0)$. Använd polära koord.



Inlämningsuppgifterna finns på baksidan.

I1a) Det plana området $\mathcal{D}$ begränsas av x-axeln och parabeln $z = 2a(1-(x/3a)^2)$ och har i punkten $(x,z) \in \mathcal{D}$ areadensiteten $\delta(x,z) = \delta_0 \cdot z/2a$. Bestäm dess area, massa och medeldensitet.

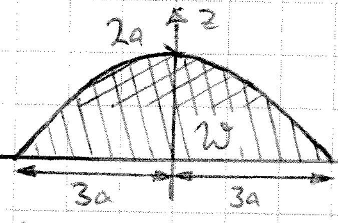


b) Pga. symmetri finns områdets tyngdpunkt (masscentrum) på z-axeln. Bestäm tyngdpunkten.

I2) Beräkna dubbelintegralen $I = \int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \sqrt{16-y^4}\, dy \right) dx$ genom att byta integrationsordning.

I3) Beräkna $\iiint_D xz\, dV$, då D är kroppen i uppgift DO på framsidan.

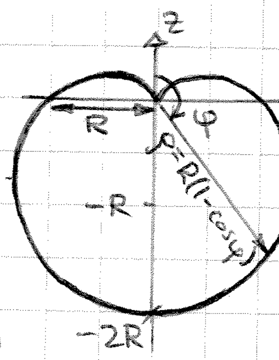
I4) Kroppen $\mathcal{W}$ begränsas av xy-planet och rotationsparaboloiden $z = 2a(1-(x^2+y^2)/(3a)^2)$ och har i punkten $(x,y,z) \in \mathcal{W}$ densiteten $\delta(x,y,z) = \delta_0 \cdot z/2a$. (Jämför med uppg. I1 ovan. Där studerar vi dock ett plant område, här studerar vi en kropp.)



a) Bestäm kroppens volym, massa och medeldensitet (Gott råd: använd polära el. cylindriska koordinater.)

b) Pga. symmetri finns kroppens tyngdpunkt på z-axeln. Visa att tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z} = a$.

I5) Beräkna massan hos den äppelformade kroppen, som begränsas av rotationskardioiden $\rho = R(1-\cos\varphi)$ (uttryckt i sfäriska koord.), om den på avståndet ρ från origo har densiteten $\delta(\rho,\varphi,\theta) = \delta_0 \cdot \rho/R$
(Gott råd: använd sfäriska koordinater.)



__Integralsatserna__ i kap. 16.3–5 och på första uppslaget, något omformulerade (märk att satserna gäller under förutsättningen att __diverse krav__ är uppfyllda):

1) $H'(t) = h(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} h(t) = H(t_1) - H(t_0)$.

$$\int_{t_0}^{t_1} H'(t)\,dt = H(t_1) - H(t_0) \qquad \underline{\text{IKFS}}$$

2) $\nabla\Phi = \bar{F} \Rightarrow \int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$,
om kurvan C går från punkten P_0 till P_1.

$$\int_C (\nabla\Phi) \bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$$

3) $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (P\,dx + Q\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$

$\iint_R (\nabla \times \bar{F}) \bullet \hat{k}\, dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F} \bullet d\bar{r}$ __Greens sats__ i $\mathbb{R}^2$

4) $\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (-Q\,dx + P\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$

$\iint_R (\nabla \bullet \bar{F})\, dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F} \bullet \hat{N}\, ds$ __Greens sats__ i $\mathbb{R}^2$

Greens satser i planet är i grund och botten en och samma sats, men i rummet generaliseras de till två helt olika satser:

5) $\iint_S (\nabla \times \bar{F}) \bullet \hat{N}\, dS = \oint_{\partial S} \bar{F} \bullet d\bar{r}$ __Stokes' sats__ i $\mathbb{R}^3$

6) $\iiint_D (\nabla \bullet \bar{F})\, dV = \oiint_{\partial D} \bar{F} \bullet \hat{N}\, dS$ __Gauss' sats__ i $\mathbb{R}^3$

7) __Stokes' universalsats:__ $\oint_{\partial S} d\bar{r}(\ldots) = \iint_S (\hat{N}\,dS \times \nabla)(\ldots)$,
där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

8) __Gauss' universalsats:__ $\oiint_{\partial D} \hat{N}\,dS(\ldots) = \iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots)$,
där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

Och slutligen lite topologi:
Finn felet i bildsekvensen nedan