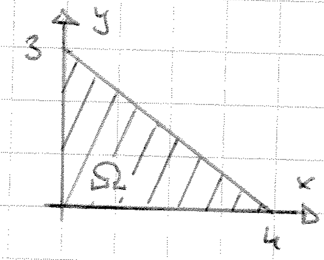
Gk2 i Matematik, hemtal v12/10 Metsalo

Tisdagen 30.3. har vi 2:a mellanförhöret, som omfattar kap. 12–13 i Adams. Samma regler gäller som för 1:a mellanförhöret. Efter mellanförhöret fortsätter vi med kap. 14–17. Torsdagen 25.3. har vi 2:a datorövningen. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat. Nedan finns en demo-uppgift D0, som är avsedd som uppvärmning för dem som känner sig behöva sådant vid sidan av uppgifterna i Adams. Den behandlas på räkneövningen endast om det framställs särskilda önskemål om det.



D0) $f(x,y) = xy(6-3x-2y)$.

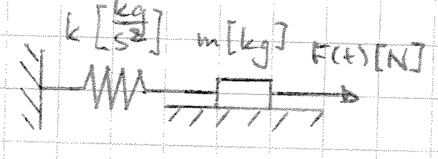
a) Beräkna f:s gradient $\nabla f(x,y)$.

b) Bestäm f:s kritiska punkter (de visar sig vara 4 till antalet).

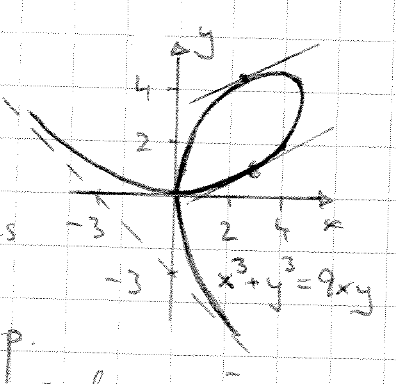
c) Bestäm f:s största och minsta värde i triangeln Ω. (Svar: $f_{max} = 4/3$, $f_{min} = -32/3$.)

Må: D1) 13R17 (Review i slutet av kap. 13.)

D2) 13.4.20 Denna typ av problem dyker också upp i Gk3 i Fourier-analysen.



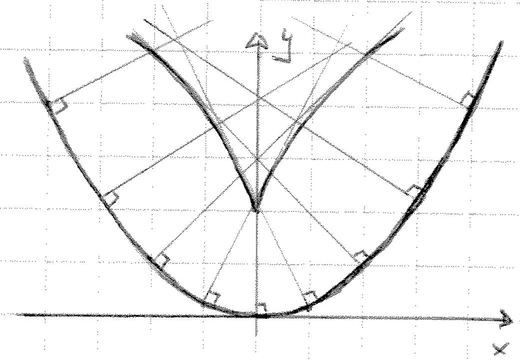
D3) Visa att funktionen $x(t) = \frac{1}{\sqrt{km}} \int_{0s}^{t} F(\tau)\cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot(t-\tau)\right)\cdot d\tau$ satisfierar diff.ekvationen $m\cdot x''(t) + k\cdot x(t) = F(t)$ med begynnelsevillkoren $x(0s) = 0m$, $x'(0s) = 0m/s$.



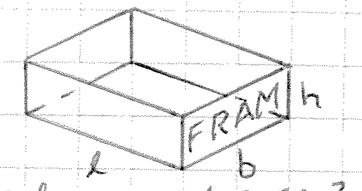
Fr: D4) Vi söker de punkter på Cartesii blad $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy = 0$, där kurvans lutning $= 1/2$. Skriv om kravet $dy/dx = \frac{1}{2}$ på formen $g(x,y) = 0$ och använd Newtons metod för 2 ekv. och 2 obek. med begynnelsevärdena $(x_0, y_0) = (2,4)$ resp. $(x_0, y_0) = (2,1)$ en iteration. Undersök sedan gärna metodens effektivitet mha. parameterframställningen från datorövning 2.

v.g. vänd

D5) Visa att enveloppen till skaran av normallinjer till en plan kurva $(x,y) = (f(t), g(t))$ är kurvans evoluta (se även formeln i hemtalslappen v7).



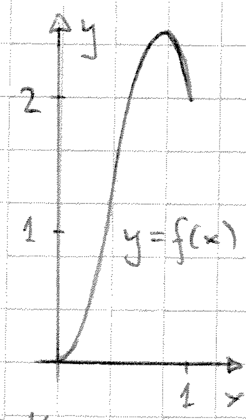
I1) Vi tillverkar en rätblocksformad låda utan lock, vars volym är $V = 60\,dm^3$. Materialet till botten och framsida kostar $5€/dm^2$ och till de övriga tre sidorna $1€/dm^2$. Hur skall lådan dimensioneras för att minimera materialkostnaden? Hur stor blir materialkostnaden då?



I2) Bestäm största värdet hos $T(x,y,z) = xy + yz$ på enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$ samt var detta största värde antas.

I3) Visa mha. Herons formel (se v8) att av alla plana trianglar med en given omkrets $2s$ har den liksidiga triangeln den största arean. (Samma resultat kan även fås utgående från ellipsens definition och egenskaper. Av alla slutna plana kurvor med en given längd $2s$ är det cirkeln, som innesluter den största arean. För att visa detta krävs dock kunskaper från Gk3.)

I4) Vi försöker approximera $f(x) = 12x^2 - 10x^3$ i intervallet $[0,1]$ med ett 1:a-gradspolynom $g(x) = ax+b$ så att $J(a,b) = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx$ minimeras. Bestäm de värdena på a och b som minimerar $J(a,b)$.



I5) Ur uppg. I2, v5 följer det att asteroiden $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ uppstår då en stege med längden a glider ned längs och ut från en vägg. Nu <u>härleder</u> vi samma resultat: Visa att enveloppen till linjeskaran bestående av linjesegment med längden a och med ändpunkterna på koord.axlarna är asteroiden $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.