Gk2 i Matematik, hemtal v11/10 Metsalo

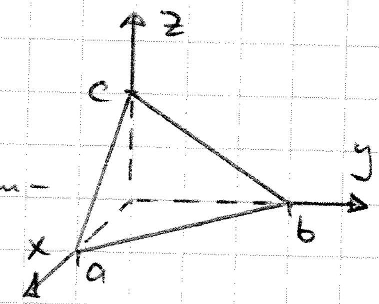
Må: D1) $F(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2$.

a) Var är $F = 0$? Bestäm F:s tecken, där $F \neq 0$.

b) Bestäm F:s kritiska punkter samt deras natur (lok. max, lok. min el. sadelpunkt) mha. 2:aderivatatestet. Jämför resultatet med F:s tecken.

D2) En excentrisk miljonär låter bygga en elliptisk simbassäng vars rand ges av $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$ och som i punkten (x,y) har djupet $f(x,y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + 2y^2)$ (enheten meter överallt). Bestäm punkterna, där djupet är störst resp. minst samt djupet i dessa punkter.

D3) Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms i tetraedern till höger så att tre av dess sidor sammanfaller med koordinatplanen.



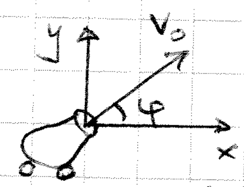
Fr: D4) $g(x,y,z) = 17 + 29x - 21y + 12z - 4x^2 - 3y^2 - z^2 + 5xy + 3yz - 3zx - z^4$.

a) Visa att 4:egradspolynomet $g(x,y,z) = g(\bar{x})$ endast har en kritisk punkt $\bar{a}$ samt bestäm den.

b) Bestäm g:s Taylor-polynom av grad 2 utvecklad i den kritiska punkten $\bar{a}$. Lämna det lämpligast på formen $\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{a})^T \mathcal{H}(\bar{a})(\bar{x}-\bar{a}) + \bar{b}^T(a)(\bar{x}-a) + c$ med Hessianmatrisen $\mathcal{H}$.

c) Använd 2:aderivatatestet för att avgöra om den kritiska punkten $\bar{a}$ är ett lok. max, ett lok. min eller en sadelpunkt. (Se även kap. 10.6 i Adams om kvadratiska former.)

D5) Vi skjuter en kanonkula med begynnelsefarten v_0 och vinkeln φ från horisontalplanet. Placera koordinaterna som i fig. och bortse från luftmotstånd o.d. Då utsätts kulan för accelerationen $\ddot{\bar{r}}(t) = -g\bar{j}$ för $t > 0$ s ($t = 0$ s vid avskjutningen).

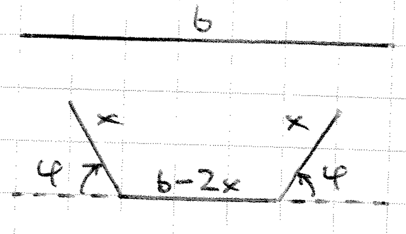


a) Härled kulans position $\bar{r}(t)$ för $t \geq 0$ s. Vilket φ maximerar avståndet till kulans nedslagspunkt?

b) Olika φ ger olika trajektorier för kanonkulorna. Bestäm trajektorieskarans envelopp.

v.g. vänd

I1) Långa plåtremsor med bredden b vikes till stuprännor genom att remsornas kanter med en bredd x vikes upp vinkeln φ symmetriskt som i figuren t.h. Vilka värden på x och φ maximerar stuprännornas tvärsnittsarea?



I2) Ur ett klot med radien R sågas ett rätblock. Visa att av alla möjliga rätblock har kuben med klotets diameter som rymddiagonal den största sammanlagda arean hos begränsningsytorna.

I3) Visa mha. optimering att om α, β och γ är vinklarna hos en plan triangel, så är $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2$.

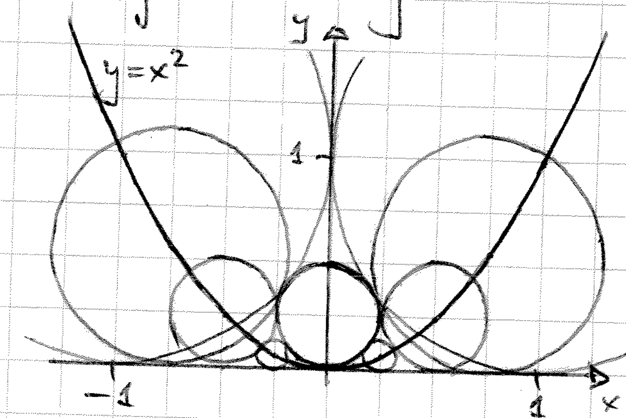
I4a) Använd Lagrange-multiplikatorer till att maximera och minimera $f(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$.

b) Använd Lagrange-multiplikatorer till att maximera och minimera $f(x,y,z) = xyz$ under bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$ och $h(x,y,z) = x - y = 0$.

I5) Vi studerar skaran av cirklar, som tangerar x-axeln och som har mittpunkten på parabeln $y = x^2$. Cirkelskarans ekvation är i så fall $(x-c)^2 + (y-c^2)^2 = (c^2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x,y,c) =$

$= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 2yc^2 = 0.$



Cirkelskaran har x-axeln som en envelopp. Visa att cirkeln $x^2 + (y - 1/4)^2 = (1/4)^2$ med undantag för dess skärningspunkter med y-axeln också är en envelopp till cirkelskaran.

Under tentamensperioden (v10) meddelas ingen undervisning i Ak2. Tänk på att det kan vara svårt att läsa på inför ett mellanförhör och fira årsfest samma helg!