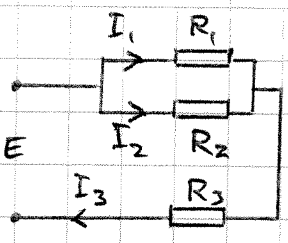
Gk2 i Matematik, hemtal v9/10 Metsalo

På baksidan beskrivs Newtons metod för att finna (approximativa) gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta.



Må:D1) I kretsen till höger har tre resistorer med resistanserna R_1, R_2 och R_3 kopplats till en spänningskälla med spänningen E. Strömmen I_1 genom resistorn R_1 ges då som bekant (?) av $I_1 = ER_2/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)$. Om $E = 40V$, $R_1 = 1.00 \pm 0.04 k\Omega$, $R_2 = 2.00 \pm 0.01 k\Omega$ och $R_3 = 6.00 \pm 0.05 k\Omega$, så är $I_1 \approx 4V/k\Omega = 4mA$.

a) Använd differentialen till att beräkna en approx. övre gräns för osäkerheten i approximationen $I_1 \approx 4mA$.

b) Om vi vill minska osäkerheten i I_1 genom att byta ut en av resistorerna mot en annan med samma nominella resistans men med bara hälften så stor osäkerhet, vilken resistor bör vi byta ut då?

D2) Kälkbacken ligger på en kulle, vars höjd ges av $z = f(x,y) = (160\,000 - x^2 - 2y^2)/1000$, där x-axeln pekar österut, y-axeln norrut och enheten är meter. Calvin befinner sig i punkten $(300, -100, 50)$.

a) Hobbes avtågar åt nordost. Går han uppåt eller nedåt?

b) Calvin avtågar i riktningen som går brantast uppåt. I vilken riktning i xy-planet (på kartan) går han?

c) I vilken riktning i $\mathbb{R}^3$ går Calvin?

v.g. vänd

D3) Antag att $F(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$, att $F(x_0,y_0,z_0)=0$ och att $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z$ är $\neq 0$ i punkten (x_0,y_0,z_0), så ekvationen $F(x,y,z)=0$ bestämmer funktionerna $x=X(y,z)$, $y=Y(z,x)$ och $z=Z(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten (x_0,y_0,z_0).
Visa att i så fall är $\partial X/\partial y \cdot \partial Y/\partial z \cdot \partial Z/\partial x = -1$ (och bli eventuellt av med en fördom).

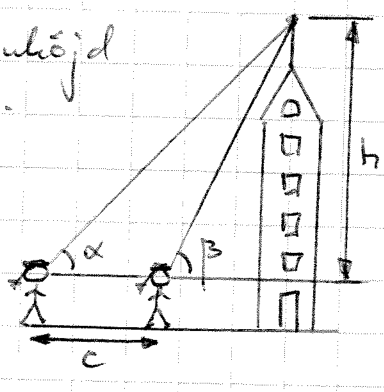
Fr: D4) $f(x,y,z)$ satisfierar $f(\bar{0})=\pi$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0})=2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{0})=3$.

a) Bestäm 1:a gradens Maclaurinpolynom för funktionen $g(t)=f(t\cdot\cos t, \sin t, \sin(2t))$.

b) Bestäm 1:a gradens Maclaurinpolynom för funktionen $h(u,v)=f(u+v, u-v, uv)$.

D5) Visa att ekvationen $F(x,y,z)=\sin(x-y)+yz+e^z=1$ bestämmer funktionen $z=g(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten $(1,1,0)$. Bestäm g:s Taylorpolynom av grad 2, utvecklad i punkten $(a,b)=(1,1)$. Lämna polynomet med potenser av $(x-1)$ och $(y-1)$ i st. f. att skriva ut det med potenser av x och y.

I1) Svakar vill mäta hur högt ovanför hans ögonhöjd toppen hos en flaggstång uppe på ett torn är. För detta ändamål mäter han vinkeln α, går sträckan c mot tornet och mäter sedan (den större) vinkeln β.



a) (gymnasietrigonometri): Uttryck höjden $h(\alpha,\beta,c)$ som en funktion av α, β och c.

b) (högskolematematik): Svakar uppmätte $\alpha=30\pm 2°$, $\beta=60\pm 3°$ och $c=30\pm 1$ m och fick $h\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c\approx 26$ m. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $h\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 30$ m, som osäkerheterna i α, β och c ger upphov till.

I2) Låt $f(x,y) = 5e^{xy} - \sin(3x) - y^2$.

a) I vilken punkt skär tangentlinjen till kurvan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$ i punkten $(0,2)$ x-axeln?

b) I vilken punkt skär tangentplanet till ytan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ i punkten $(0,2,1)$ x-axeln?

I3) Vi studerar ytan $xyz = 2$ i 1:a oktanten (där $x, y, z > 0$). Om vi tar en godtycklig punkt på ytan, så kommer ytans tangentplan i punkten att begränsa en tetraeder tillsammans med de tre koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt bestäm denna volym.

I4) Visa att ekvationerna $F_1(x,y,z) = xy + e^{y^2} + x^3 z = 3$ och $F_2(x,y,z) = \cos(y^2 z) + \ln(y + xz) + x^2 = 5$ bestämmer funktionerna $x = g_1(y)$ och $z = g_2(y)$ implicit i en omgivning av punkten $(2,1,0)$.
Bestäm 1:a gradens Taylor-polynom av funktionerna g_1 och g_2 utvecklade i punkten $a = 1$.

I5) Antag att $g(u,v)$ är av klass $C^2(\mathbb{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 \equiv 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x,y) = g\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Då är även $h(x,y)$ av klass $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Visa att h är också harmonisk, dvs. att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 \equiv 0$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nedan beskrivs Newtons metod för att finna (approximativa) gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta. Detta är en utvidgning av kap. 4.6, då vi hade 1 ekvation med 1 obekant och även av kap. 13.6 i Adams, där man arbetar med 2 ekvationer och 2 obekanta.

<u>Newtons metod</u> för n ekvationer med n variabler:

Om $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är n st. funktioner av n variabler (som vi tänker oss bildar en n-kolumnvektor) och vi söker en lösning till

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}) = 0 \\ f_2(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

(ett ekvationssystem med n ekvationer och n obekanta)

kan iterationsschemat

$$\bar{x}_{m+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{m+1} = \bar{x}_m - \left(J(\bar{x}_m)\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix} =$$

Matris-inverterig

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_m - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix}$$

med lämpligt begynnelsevärde $\bar{x}_0$ (en n-kolumnvektor) konvergera till ett gemensamt nollställe för de n st. funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Precis som i fallet med 1 ekvation med 1 variabel kan Newtons metod också divergera. Konvergens förutsätter bra begynnelsevärden, men om Newtons metod konvergerar, tenderar den att konvergera snabbt.