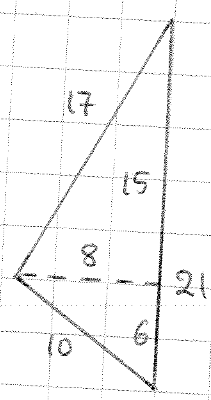
Gk2 i Matematik, hemtal v8/10 Metsalo

Måndagens räkneövning används i första hand till att besvara frågor inför tisdagens mellanförhör. Om tiden tillåter, härleder vi också Coriolis-kraften, som även behandlas i kap. 11.2. Om det mot förmodan skulle finnas tid över efter detta, motiverar vi de partiella differential-ekvationerna $\partial T/\partial t = \delta \cdot \partial^2 T/\partial x^2$ (värmeekvationen för temperaturen $T(x,t)$ i en stång) och $\partial^2 y/\partial t^2 = c^2 \cdot \partial^2 y/\partial x^2$ (vågekvationen för utslaget från viloläget hos en vibrerande sträng).

Fr: D1) 12.3.36 i Adams. Jämför med funktioner av en variabel: allt gäller inte automatiskt för funktioner av flera variabler!



D2) Herons formel säger att en plan triangel med sidorna a, b och c har arean $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, där $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ är halva omkretsen. Detta kan också skrivas som $A(a,b,c) = \frac{1}{4}\cdot\left(2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\right)^{1/2}$.
Sidorna hos en triangel uppmättes till 10.0 ± 0.1 m, 17.0 ± 0.3 m resp. 21.0 ± 0.4 m. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $A \approx 84\,m^2$ som osäkerheterna i sidlängderna a, b och c ger upphov till.

D3) Temperaturen T (temperaturenheter) i punkten (x,y,z) (längdenheter) vid tiden t (tidsenheter) ges av $T(x,y,z,t) = e^{-2t}\cdot(\cos(3x-4y)+\sin(5z))$.
a) Visa att $T(x,y,z,t)$ satisfierar den 3-dimensionella värmeekvationen $\partial T/\partial t = c\cdot(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2)$ för ett visst värde på konstanten c (areaenheter per tidsenhet) samt bestäm värdet på c.

(forts. på insidan)

D3 b) Hankatten Pelle sitter stilla i origo $(x,y,z)=(0,0,0)$ (längdenheter). Vid tiden $t=0$ (tidsenheter) erfar han temperaturen $T(0,0,0,0)=1$ (temperaturenhet). Vilken ändringshastighet hos temperaturen (temperaturenheter per tidsenhet) erfar han just då?

c) Svatta rör sig längs skärningskurvan mellan planet $4x-3y+2z=0$ och ytan $x\cdot e^{y}=y\cdot\cos z$ (längdenheter). Vid tiden $t=0$ (tidsenheter) befinner sig även hon i origo $(x,y,z)=(0,0,0)$ (längdenheter) och rör sig längs skärningskurvan med farten $v=|\bar{r}'(t)|=6$ (längdenheter per tidsenhet) i riktningen, som gör att z ökar. Bestäm Svattas hastighetsvektor $\bar{v}(t)=\bar{r}'(t)$ (längdenheter per tidsenhet, fast en vektor) i detta ögonblick.

d) Vilken ändringshastighet hos temperaturen (temperaturenheter per tidsenhet) erfar Svatta just då?

☆

I1 Visa att den givna funktionen satisfierar den givna partiella differential-ekvationen:

a) $f(x,y)=\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$; $\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2\equiv 0$

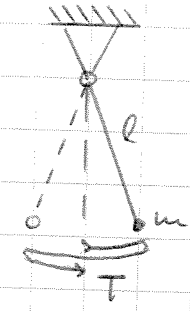
b) $f(x,t)=A\cos(\kappa x)\cdot e^{-\kappa^2 t}+B\sin(\kappa x)\cdot e^{-\kappa^2 t}$; $\partial^2 f/\partial x^2=\partial f/\partial t$ (A, B, κ konstanter)

c) $f(x,t)=A\sin(x-ct)+B\cos(x+ct)$; $\partial^2 f/\partial t^2=c^2\cdot\partial^2 f/\partial x^2$.

d) $f(r,\theta)=r^n\cdot(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$, $r\neq 0$; $r^2\cdot\partial^2 f/\partial r^2+r\cdot\partial f/\partial r+\partial^2 f/\partial\theta^2\equiv 0$ ($n\in\mathbb{Z}$; A, B konstanter)

I2 Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp till och med 1 är alla kontinuerliga i hela planet. Vi inför polära koordinater r och θ via $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Då är $f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(r,\theta)$. Visa mha. kedjeregeln att $(\partial F/\partial r)^2+(\frac{1}{r}\cdot\partial F/\partial\theta)^2=(\partial f/\partial x)^2+(\partial f/\partial y)^2$. (Uttrycket används bl.a. vid area-beräkningar, som kommer i kap. 14.)

I3. $f(x,y,z) = x \cdot e^{y+z^2} \Rightarrow f(2,-4,2) = 2$. Approximera $f(2.05, -3.92, 1.97)$ mha. linearisering. Jämför sedan med fickräknarens värde.



I4. Svängningstiden T för små svängningar hos en matematisk pendel ges av $T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$, där l är den styva, viktlösa trådens längd och g är tyngdkrafts-accelerationen. Märk att T inte beror på massan m.

Svakar bygger en pendel för att approximera g. Han uppmäter l till 1.00 ± 0.03 m och T till 2.00 ± 0.05 s. Detta ger honom att $g \approx \pi^2$ m/s² (≈ 9.87 m/s²). Använd differentialen till att bestämma en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $g \approx \pi^2$ m/s² av g, som osäkerheterna i l och T ger upphov till. (Den isokrona pendeln (se D4 och D5, f2 v7) har konstant svängningtid också för stora svängningar, om man bortser från luftmotstånd.)

I5a) Bestäm en normalvektor till ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2=55$ i punkten $P(5,3,2)$ (jämför med uppg. 9 från datorövningen).

b) Bestäm en normalvektor till konen $x^2 = y^2+4z^2$ i P.

c) Bestäm en tangentvektor till skärningskurvan mellan ellipsoiden och konen i punkten P.