Gk2 i Matematik, hemtal v7/10 — Metsalo

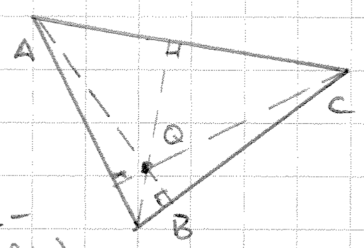
Tisdagen 23.2. har vi 1:a mellanförhöret, som omfattar kap. 7–11 i Adams med undantag för sista avsnittet i kap. 9 (som i olika upplagor behandlar olika saker). Till mellanförhöret får varken räknare eller tabellsamlingar medtagas.

Torsdagen 18.2. har vi 1:a datorövningen, då vi kommer att använda programpaketet Mathematica. Uppgifterna till datorövningen kommer att delas ut separat.

Må: D1a) 10.2.8 (medianernas skärningspunkt, tyngdpunkten)

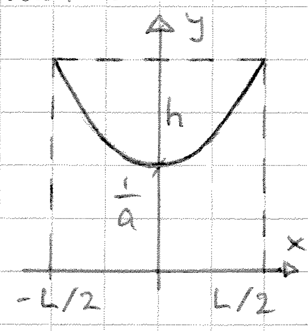
b) Använd resultatet från a)-delen och vektorräkning till att visa att om vi tar en godtycklig tetraeder och sammanbinder varje hörn med skärningspunkten för motstående sidas medianer, så kommer dessa fyra linjer att skära i en punkt.

c) Visa (lämpligast mha. vektorer och skalärprodukten) att även de tre höjderna hos en plan triangel ABC skär i en punkt Q (som ligger utanför triangeln, om den är trubbvinklig).

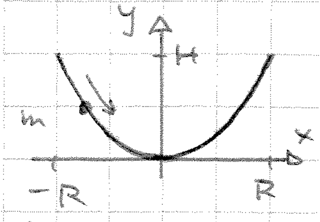


Kommentar: Hos plana trianglar skär även mittpunktsnormalerna i en punkt (den omskrivna cirkelns mittpunkt) och medianernas, höjdernas och mittpunktsnormalernas skärningspunkter ligger på en rät linje. Vidare skär även bisektriserna i en punkt (den inskrivna cirkelns mittpunkt.)

D2. I kap. 10.2 visas att då en kedja hänger fritt, ges dess ekvation av $y = \frac{1}{a}\cdot\cosh(ax)$ om vi väljer koordinaterna lämpligt. En kedja med längden L, upphängd som i figuren, är horisontell, men en kedja med längden $L + \Delta L$ säckar sträckan h i mitten. Visa mha. Maclaurinutvecklingar att om $\Delta L \ll L$ (mycket mindre än), så är $h \approx \sqrt{\frac{3}{8}\cdot L\cdot \Delta L}$.



D3. En pärla med massan m startar från vila från punkten $(-R, H)$ och glider (inte rullar) längs en tråd böjd till parabeln $y = Hx^2/R^2$ till punkten (R, H) utan friktion under inverkan av tyngdkraften $\bar{F} = -mg\hat{j}$. Bestäm pärlans fart och centripetalacceleration



a) i punkten $(0,0)$ b) i punkten $(R/2, H/4)$.

Fr: En kurva $\bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ i planet (given på parameterform) har evolutan $\bar{r}_c(t) = \xi(t)\hat{i} + \eta(t)\hat{j}$, där

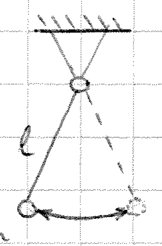
$$\xi(t) = x(t) - y'(t)\cdot\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \quad \text{och}$$

$$\eta(t) = y(t) + x'(t)\cdot\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

(förutsatt att kurvan är "tillräckligt snäll").

D4. 11.R.11 (Review) Använd formeln för evolutan ovan.

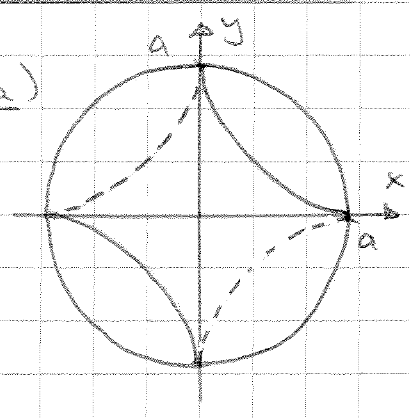
D5. 11.Ch.4 (Challenging Problems): Tautokronen



Kommentar: Dessa två uppgifter ger tillsammans den isokrona pendeln. För en vanlig matematisk pendel beror svängningstiden nämligen på utslagsvinkeln, även om den för små svängningar är nästan konstant.

I1a) 11.1.14 (kurvan kallas Vivianis kurva)

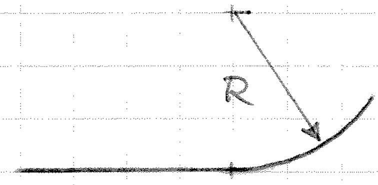
b) Svakar har efter noggranna observationer kommit fram till att "sömmen" hos en tennisboll med radien a av allt att döma har en projektion i form av en asteroid: $x(t) = a\cdot\cos^3 t$, $y(t) = a\cdot\sin^3 t$, $xyz \geq 0$. Ge sömmen på parameterform (speciellt $z(t)$; $x(t)$ och $y(t)$ är ju redan givna. $(\cos^2 t + \sin^2 t)^3 = 1^3 = 1$ kan underlätta) och bestäm sömmens tangentlinje i $\mathbb{R}^3$ i punkten, som svarar mot parametervärdet $t = \pi/3$.



12. 11.5.13 Mha. detta får vi metoder att göra relativt bra skisser av ellipser med enbart passare och linjal.

13. Bestäm längden hos överhandsknopen $\vec{r}(t) = (2+\cos(3t/2))\cdot\cos t\cdot\hat{i} + (2+\cos(3t/2))\cdot\sin t\cdot\hat{j} + \frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\sin(3t/2)\,\hat{k}$.

14. 11.R.7 (Review): Klotoiden. Tänk gärna också vad som skulle hända, om man hos järnvägar skulle sammanbinda rätlinjiga banor med cirkulära.



15. Rymdkurvan $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + \ln t\,\hat{k}$ närmar sig negativa z-axeln, då $t \to 0^+$ och blir alltmer parallell med positiva x-axeln, då $t \to \infty$, eftersom x-koordinaten växer mycket snabbare än y- och z-koordinaten, då parametern t växer.

a) Bestäm längden hos den delen av kurvan, som finns mellan punkten, där kurvan skär xy-planet och punkten, som svarar mot parametervärdet $t = 2$.

b) Bestäm minimala krökningsradien hos kurvan.