Gk2 i Matematik, hemtal v6/10 Metsola

På insidan av detta blad finns de 9 icke-degenererade 2:a-gradsytorna sammanställda (och på kursens hemsida finns de att beskåda i större format). En del av dem finns också i montrarna utanför matematik-biblioteket!

Må: D1. En dag leker Svalear med en stålkula. Han låter den falla mot ett betonggolv och lyssnar på klickarna från studsarna, som kommer allt tätare, eftersom kulan förlorar energi vid varje studs (bl.a. i form av ljud: "Det sa bara 'klick'!" (citat: HMCG)). Det låter som om kulan studsar oändligt tätt mot slutet, men att den slutar studsa efter en ändlig tid. För att undersöka fenomenet närmare släpper Svalear kulan från olika höjder h över golvet och observerar, att kulan studsar upp till höjden $p \cdot h$, där $p \in]0,1[$ och tycks vara oberoende av h.

a) (gymnasiefysik): Härled formeln för tiden t_0 det tar för kulan att falla till golvet från höjden h_0, om kulans massa är m, gravitationsaccelerationen är g, vi bortser för enkelhets skull från luftmotstånd o.d. och antar att kulan är punktformad.

b) (högskolematematik): Om vi idealiserar och tänker oss att kulan studsar oändligt många gånger mot golvet och att varje studs är momentan, hur lång sträcka kommer kulan totalt att röra sig innan den stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: rör den sig totalt en ändlig el. oändlig sträcka?

c) (dito): Hur lång tid tar det innan kulan stannar, om den släpps från höjden h_0? I synnerhet: tar det en ändligt el. oändligt lång tid?

D2 (En utmaning!) 9.2.26–31 i Adams.

D3. Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1/1^1 + 1/2^2 + 1/3^3 + \ldots = 1 + 1/4 + 1/27 + \ldots$ konvergerar och approximera dess summa så att felet i approximationen är $< 1/100$ till absolutbeloppet. Förklara hur vi kan vara säkra på att felet inte är större.

Fredagens demo-uppgifter och inlämnings-uppgifterna på baksidan.

Fr: D4a) 9.5.23 b) 9.5.24 c) 9.5.28 d) 9.5.32 i Adams

D5. Bestäm Maclaurin-serien för funktionen $F(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ genom att utveckla integranden $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$ i form av en Maclaurin-serie. Approximera $F(2)$ genom att endast ta med de tre första termerna i serien och bestäm en övre gräns för felet i approximationen.

I1 a) 9.2.7 b) 9.2.20 c) 9.2.14 i Adams

I2 a) Visa att serierna $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n^2)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$ divergerar.
b) Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^3)$ konvergerar och bestäm någon övre och undre gräns för dess summa.

I3. Bestäm konvergensradien och konvergensintervallet hos respektive potensserie. Glöm inte att undersöka seriens uppförande i eventuella ändpunkter hos konvergensintervallet:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+3)^n/\sqrt{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}\cdot(x-1)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}/5^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^{3n}/n^n$

I4. Studera Svakars sillfrukost, som delades ut tillsammans med kursinformationen och analysera strategierna, som används av Caesar, David, Kalle och Olof. Var dock försiktiga med empiriska försök: divergens kan vara fatalt!

I5. Undersök den linjära, homogena 2:a ordningens ODE $y''(x) - x\cdot y(x) = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Ansätt att ekvationen har en lösning, som kan ges på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (dvs. i form av en potensserie). Bestäm koefficienterna a_n och slutligen konvergensintervallet för potensserien.
(Differentialekvationen kallas för Airys ekvation och dyker upp bl.a. i optiken.)