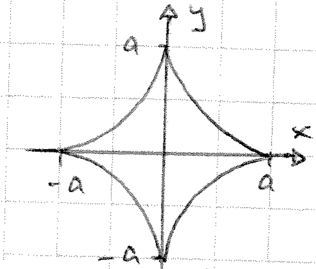
Gk2 i Matematik, hemtal v5/10 Metsalo

<u>Räknestugan</u> kommer att vara nere i Ölkken torsdagar 12–14 med början to 28.1.

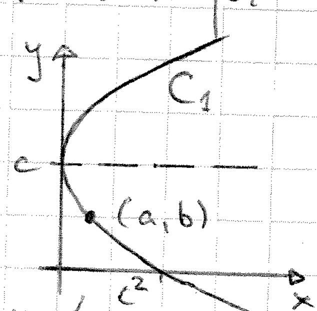
På <u>insidan</u> av detta blad finns <u>kägelsnitten</u> på standardform. Ekvationer på formen $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ger kägelsnitt och vi kan analysera dem fullständigt. Om vi i ekvationen för någon kurva i planet ersätter x med $x-x_0$ och y med $y-y_0$ svarar detta mot att kurvan förskjuts med vektorn (x_0, y_0).

Räkneövningen må 1.2. är <u>inställd</u>, så demo-uppgifterna nedan behandlas på räkneövningen fr 5.2.

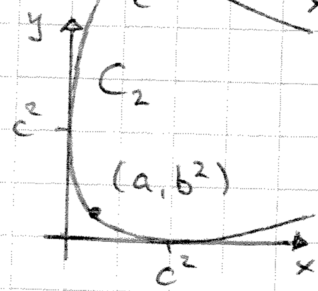
D1a) Beräkna båglängden hos asteroidkurvan $(x,y)=(a\cdot\cos^3 t, a\cdot\sin^3 t)$ i figuren t.h.



b) Beräkna arean innanför asteroidkurvan. (Gott råd: friska upp integrationstekniken från Gk1)
(Kontroll: om ett plant område har arean A och dess begränsningskurva har längden L, så är $L^2/A \geq 4\pi$ med likhet endast för en cirkel.)



D2a) 8.4.10a) b) 8.4.22 i Adams
Anmärkning: Högskolematematik handlar inte om att slå upp färdiga formler i läroböcker!

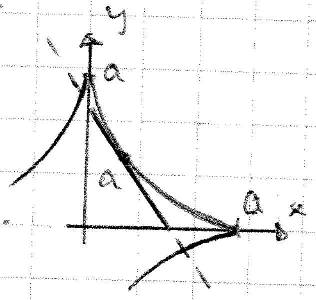


D3 (En utmaning!) Parabeln C_1 i högra halvplanet ($x \geq 0$) har horisontell axel, toppen i $(0,c)$ och går genom punkten $(c^2, 0)$. $(a,b)\in C_1 \Leftrightarrow (a,b^2)\in C_2$. Visa att även kurvan C_2 är en parabel (i första kvadranten $x, y \geq 0$) samt beräkna arean hos området nära origo, som begränsas av C_2 och koordinataxlarna.

D4. 8.6.10 i Adams (Skissa gärna kurvorna först)

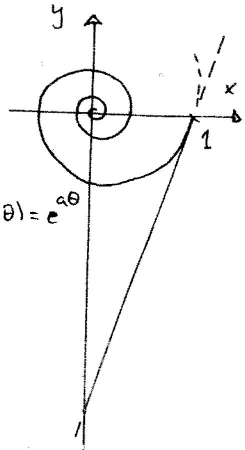
D5. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}, \dots\right\}$
Visa att talföljden är monoton och begränsad. (Detta medför att den har ett gränsvärde. Försök gärna bestämma gränsvärdet (detta är dock inte en del av uppgiften!).)
Inlämningsuppgifterna finns på baksidan.

I1. Vi studerar en ellips E och en hyperbel H i xy-planet. E:s toppar är H:s brännpunkter och H:s toppar är E:s brännpunkter. E:s ekvation är $x^2/5^2+y^2/4^2=1$. Bestäm H:s ekvation samt ekvationen för dess asymptoter på formen $y=ax+b$.



I2. Vi studerar åter asteroiden från D1 ovan. Visa att den delen av tangentlinjen till asteroiden, som begränsas av koordinataxlarna, har längden a.

I3. Kurvan $r(\theta)=e^{a\theta}$ kallas för en <u>logaritmisk spiral</u> (i spiralen i figuren t.h. är $a>0$). Linjen i figuren är spiralens tangentlinje i punkten $(r,\theta)=(1,0)$ ($\Rightarrow (x,y)=(1,0)$). Visa att den heldragna delen av spiralen (motsvarande $\theta \le 0$) har samma längd som den heldragna delen av tangentlinjen, som finns mellan koordinataxlarna.



I4. Beräkna volymen hos kroppen som uppstår då endera av områdena, som begränsas av kurvan $r=a\cdot\sin^2\theta$, roterar kring y-axeln (skissa kurvan först).

I5. Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras rekursivt via $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt{14+\sqrt{a_n}}$ för $n=1,2,3,\ldots$ Visa mha. induktion att i) $a_n\ge 0,\ \forall n$ (annars vore a_{n+1} inte definierad) ii) $a_n\le 5,\ \forall n$ och iii) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en monoton talföljd. Dessa egenskaper medför talföljden har ett gränsvärde. Sätt upp den ekvation, som detta gränsvärde satisfierar. Försök gärna bestämma gränsvärdet (detta är dock inte en del av uppgiften!).