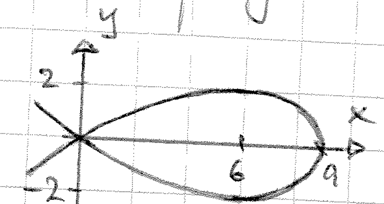
Gk2 i Matematik, hemtal v4/10 Metsalo

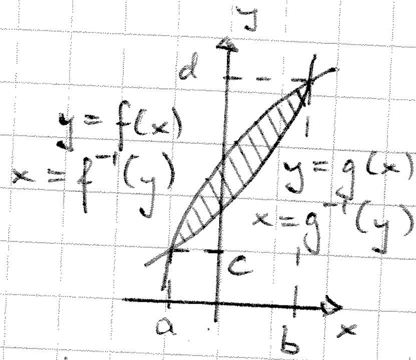
Demo-uppgifterna (D) räknas hemma före respektive övning och presenteras sedan på övningen. Inlämnings-uppgifterna (I) räknas hemma och på övningen och lämnas normalt in senast på övningen nästföljande måndag. Övningen må 1.2. är dock inställd, så inlämnings-uppgifterna nedan kan undantagsvis lämnas in på föreläsningen fr 2.2.
På baksidan finns en del formler för integralens tillämpningar.

Må: D1. Kurvan $27y^2 = x^2(9-x)$ bildar en ögla som i figuren t.h. Beräkna öglans båglängd.



D2a) Låt kurvan ovan rotera kring x-axeln och beräkna volymen hos den droppformade kroppen, som uppstår.
b) Beräkna arean hos begränsningsytan till denna kropp. (Kontroll: om en kropp har volymen V och dess begränsningsyta har arean A, så är $A^3/V^2 \geq 36\pi$ med likhet endast för ett klot.)

D3. (En utmaning!) Låt f och g vara två funktioner, definierade, kontinuerliga och strängt växande i $[a, b]$ sådana att $f(a) = g(a) = c > 0$, $f(b) = g(b) = d$ och $f(x) > g(x)$ för $a < x < b$ som i fig. t.h.



Då har f och g inversfunktionerna f^{-1} resp. g^{-1} som är def. kont. och str. växande i $[c, d]$ sådana att $f^{-1}(c) = g^{-1}(c) = a$, $f^{-1}(d) = g^{-1}(d) = b$ och $g^{-1}(y) > f^{-1}(y)$ för $c < y < d$.
Då det i figuren skuggade området, som begränsas av kurvorna $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ och $y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$, roterar kring x-axeln, uppstår en rot. symm. kropp. Tvärsnittsmetoden ger att dess volym är $V_1 = \int_a^b \pi\cdot((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx$, medan metoden med cylindriska skal ger att volymen är $V_2 = \int_c^d 2\pi y\cdot(g^{-1}(y) - f^{-1}(y))\,dy$. Dessa två integraler borde ge samma värde, eftersom det rör sig om samma volym.
Visa att $V_1 = V_2$. (Gott råd: använd variabel-substitution och partiell integrering.)

Fredagens demo-uppgifter samt inlämnings-uppg. på insidan.

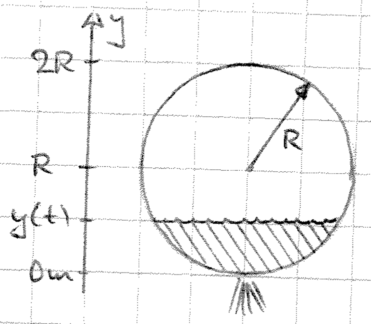
Fr: D4. Då en partikel med massan m rör sig med farten v, är dess kinetiska energi som bekant $E_{kin} = mv^2/2$.

a) Beräkna kinetiska energin hos en tunn cirkelskiva med radien R (enh. m) och area-densiteten δ_2 (enh. kg/m^2), som roterar med vinkelhastigheten ω (enh. rad/s) kring

i) en diameter   ii) mittpunkten

b) Beräkna kinetiska energin hos ett klot med radien R och densiteten δ_3 (enh. kg/m^3), som roterar med vinkelhastigheten ω kring en diameter.

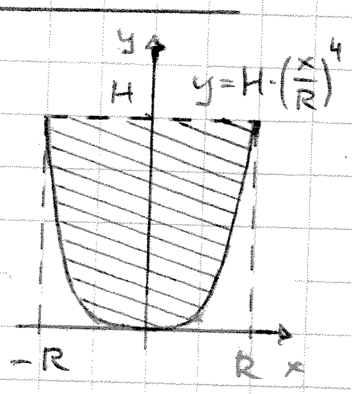
D5. (En utmaning!) Torricellis lag säger att $dV/dt = -A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot y(t)}$, där y är vätskedjupet hos en vätska, som rinner ut genom ett hål med arean A_0 i botten på ett kärl under inverkan av gravitationen, om man bortser från viskositet turbulens &c.



Härled mha. detta (den separabla) differential-ekvationen $\pi \cdot (2R \cdot y(t) - (y(t))^2) \cdot y'(t) = -A_0 \cdot \sqrt{2g \cdot y(t)}$, då vätskan rinner ut ur en sfärisk cistern med radien R och med ett hål med arean A_0 i botten.

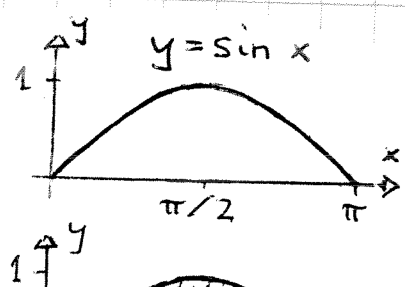
Bestäm även minimala tiden att tömma en full sfärisk cistern på detta sätt.

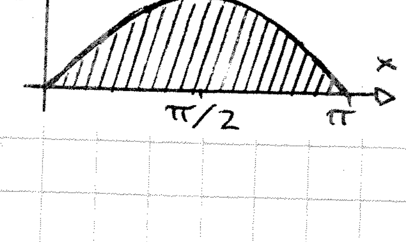
I1. Vi tillverkar ett rotationssymmetriskt vattenur med tvärsnittsprofilen som i fig. t.h. Beräkna dess volym mha. a) tvärsnittsmetoden b) metoden med cylindriska skal.



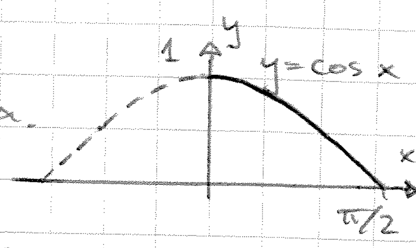
I2a) Beräkna arean hos den rot.symm. ytan, som uppstår då kurvan $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ roterar kring x-axeln.

b) Beräkna volymen hos den rot.symm. kroppen, som uppstår då det skuggade området i den nedre figuren roterar kring x-axeln. (Ytan i a)-delen är kroppens begränsningsyta. Använd gärna kontrollen i uppg. D1 ovan.)

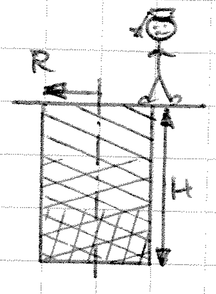




I3. Då kurvan $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$ roterar kring y-axeln uppstår en rot.-symm. yta. Sätt upp integralen som ger arean hos denna yta och approximera denna area genom att approximera integralen mha. Simpsons metod så att integrationsintervallet delas upp i två lika långa delintervall.



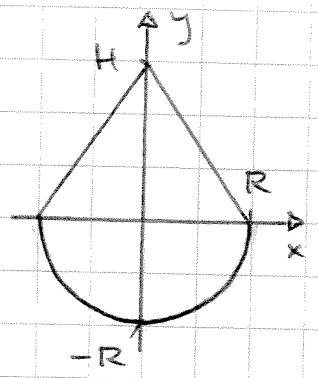
I4. En tank på formen av en rät cirkulär cylinder med radien R och höjden H är fylld med punsch. Punschen har stått ett tag, så dess densitet är högre i botten. På djupet y är densiteten $\delta(y) = \delta_0 \cdot \sqrt{1 + (y/H)^2}$, så vid ytan är densiteten δ_0 (enh. kg/m³) och i botten $\sqrt{2} \cdot \delta_0$.



a) Beräkna massan hos punschen. (Integraltabellerna i slutet av Adams kan vara till nytta.)

b) Beräkna arbetet som utförs då punschen pumpas upp ur tanken till marknivån.

I5. Svakar tänker svarva en liten kloss av homogent trävirke åt sin lilla systerdotter. Den består av ett halvklot med radien R och ovanpå det en kon med höjden H. (I figuren t.h. syns ett tvärsnitt genom klossens symmetriaxel.) Hur stor får H maximalt vara i förhållande till R för att klossen inte skall välta, då den står på halvklotet?



(Det gäller att se till att kroppens tyngdpunkt är lägre än halvklotets mittpunkt, dvs. att $\bar{y} < 0$ med koordinaterna som i figuren. Problemet är analogt med ex 4, kap. 7.5 i Adams, men det är naturligare att bryta upp integralen i två delar: $y \in [-R, 0m]$ (halvklotet) respektive $y \in [0m, H]$ (konen).)

Dessa 5 inlämnings-uppgifter kan lämnas in på föreläsningen ti 2.2. Normalt lämnas dock inlämnings-uppgifterna in på måndagens räkneövning.

Sammanfattning av formlerna för integralens tillämpningar

Area: $\Delta A \approx h \cdot \Delta b$, $\Delta A \approx b \cdot \Delta h$
(i pol. koord: $\Delta A \approx \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \Delta\theta$)

Volym:
Tvärsnittsmetoden: $\Delta V \approx A \cdot \Delta b$
Specialfall: rot. symm. kropp
$\Delta V \approx A \cdot \Delta b = \pi (r_2^2 - r_1^2) \cdot \Delta b$
Cylindriska skal (end. för rot. symm. kropp)
$\Delta V \approx 2\pi r \cdot h \cdot \Delta r$

Båglängd: $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2} \cdot \Delta t$
(i $\mathbb{R}^3$: $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2 + (\Delta z/\Delta t)^2} \cdot \Delta t$)

Area hos rot. symm yta:
$\Delta A \approx 2\pi r \cdot \Delta s$, Δs från båglängden ovan.

(Tröghetsmoment map. en axel a:
$\Delta J_a \approx \Delta m \cdot r_a^2$, där r_a är avst. till axeln.)

Massa och tyngdpunkt hos en tråd med variabel dens:
$\Delta m \approx \rho \cdot \Delta s$, Δs från båglängden ovan
$x_T = \frac{1}{m} \cdot \int x\,dm$, $y_T = \frac{1}{m} \cdot \int y\,dm$, $z_T = \frac{1}{m} \cdot \int z\,dm$

Tyngdpunkten hos en plan homogen skiva:
ΔA från area ovan
$x_T = \frac{1}{A} \cdot \int x\,dA$, $y_T = \frac{1}{A} \cdot \int y\,dA$
(här måste ΔA ha konstant x resp. y, men en
tunn homogen strimla har sin tyngdpunkt i mitten)

Arbete: $\Delta W \approx F \cdot \Delta s$, $\Delta W \approx \Delta F \cdot s$

Vätsketryck: $P = \rho \cdot g \cdot d$ (dens. · grav. · djup)
Kraft: $\Delta F \approx P \cdot \Delta A \approx \rho g d \cdot \Delta A$

Motsv. integral fås sedan som gränsvärdet av en summa,
som i allmänhet kommer att vara en Riemann-summa.