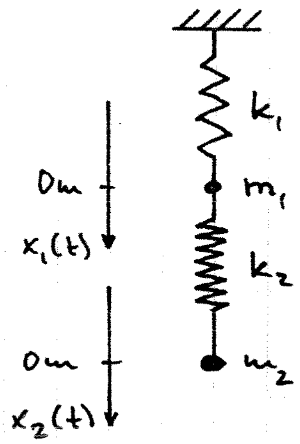
I systemet till höger har vi två massor m_1 och m_2 upphängda i två fjädrar med fjäderkonstanterna k_1 och k_2. Nedan härleder vi ur rörelseekvationerna för detta system ett system av två kopplade 2:a ordningens linjära DE, som kan lösas analytiskt eller numeriskt.
Vi bortser för enkelhets skull från eventuell dämpning i systemet



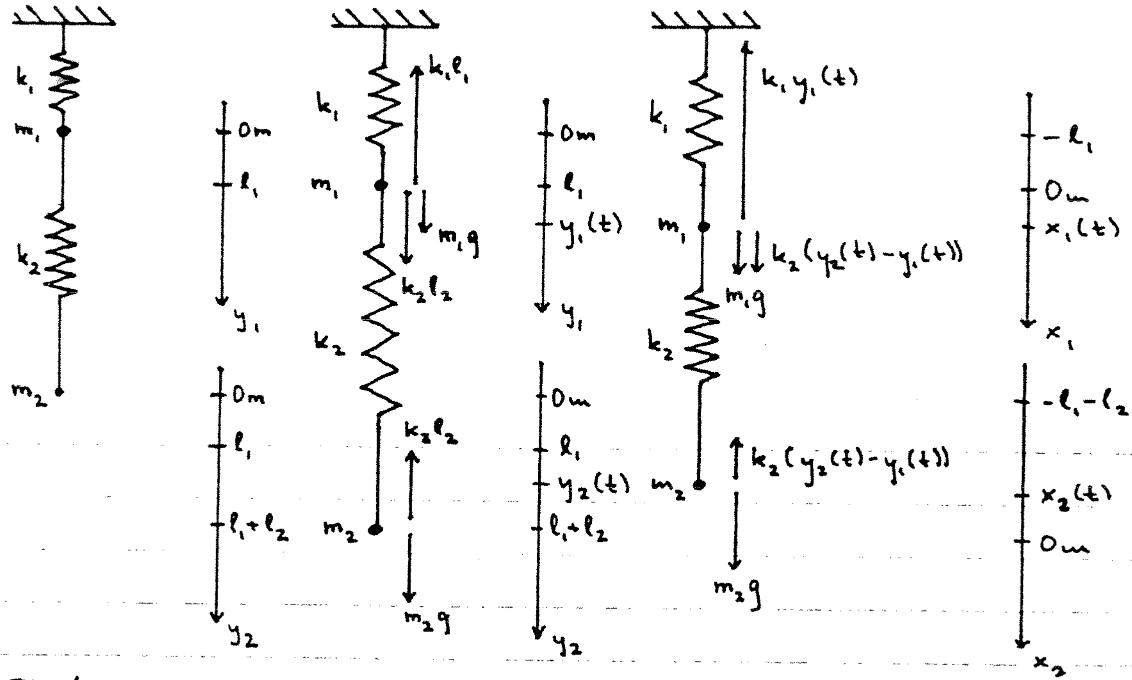


Fig.1 Fig.2 Fig.3

Fig.1: Jämvikt utan gravitation (fjädrarnas vilolägen)

Fig.2: Jämvikt med gravitation. $m_1 g = k_1 l_1 - k_2 l_2$,

$\underline{m_2 g = k_2 l_2 \Rightarrow (m_1 + m_2) g = k_1 l_1}$

Fig.3: Rörelse. $\Sigma F_1 = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) + m_1 g = m_1 \cdot y_1''(t)$

$$\Sigma F_2 = -k_2(y_2 - y_1) + m_2 g = m_2 \cdot y_2''(t)$$

$$\begin{cases} y_1'' + \frac{k_1+k_2}{m_1}\cdot y_1 - \frac{k_2}{m_2}\cdot y_2 = g \\ y_2'' - \frac{k_2}{m_2}\cdot y_1 + \frac{k_2}{m_2}\cdot y_2 = g \end{cases}$$

Inför: $x_1(t) = y_1(t) - l_1 \Rightarrow x_1' = y_1'\ ,\ x_1'' = y_1''$.

$$x_2(t) = y_2(t) - l_1 - l_2 \Rightarrow x_2' = y_2'\ ,\ x_2'' = y_2''$$

$$\begin{cases} x_1'' + \frac{k_1+k_2}{m_1}\cdot(x_1 + l_1) - \frac{k_2}{m_1}\cdot(x_2 + l_1 + l_2) = g \\ x_2'' - \frac{k_2}{m_2}\cdot(x_1 + l_1) + \frac{k_2}{m_2}\cdot(x_2 + l_1 + l_2) = g \end{cases}$$

$$\left\| \begin{aligned} x_1''(t) + \frac{k_1+k_2}{m_1}\cdot x_1(t) - \frac{k_2}{m_1}\cdot x_2(t) &= 0\,m/s^2 \\ x_2''(t) - \frac{k_2}{m_2}\cdot x_1(t) + \frac{k_2}{m_2}\cdot x_2(t) &= 0\,m/s^2 \end{aligned} \right.$$

Analytisk lösning:

$$\begin{cases} x_1''(t) + \frac{k_1+k_2}{m_1}\cdot x_1(t) - \frac{k_2}{m_1}\cdot x_2(t) = 0\,m/s^2 & (1)\\ x_2''(t) - \frac{k_2}{m_2}\cdot x_1(t) + \frac{k_2}{m_2}\cdot x_2(t) = 0\,m/s^2 & (2)\end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_2(t) = \frac{m_1}{k_2}\cdot x_1''(t) - \frac{k_1+k_2}{k_2 m_1}\cdot x_1(t)$$

$$(2) \Rightarrow x_2''(t) = \frac{k_2}{m_2}\cdot x_1(t) - \frac{k_2}{m_2}\cdot\left(\frac{m_1}{k_2}\cdot x_1''(t) + \frac{k_1+k_2}{k_2}\cdot x_1(t)\right) =$$

$$= -\frac{m_1}{m_2}\cdot x_1''(t) - \frac{k_1}{m_2}\cdot x_1(t)$$

$$(1)'' \Rightarrow x_1^{(4)} + \frac{k_1+k_2}{m_1}\cdot x_1'' - \frac{k_2}{m_1}\cdot\left(-\frac{m_1}{m_2}\cdot x_1'' - \frac{k_1}{m_2}\cdot x_1\right) =$$

$$= x_1^{(4)} + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\cdot x_1'' + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}\cdot x_1 = 0 \; (m/s^4)$$

Via elimination får vi en 4:e ordn. linjär homogen DE med konstanta koefficienter. Ansatsen $x_1(t) = e^{rt}$ ger kar. polynomet

$r^4 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\cdot r^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$. Om vi sätter $s = r^2 \in \mathbb{C}$ kan vi lösa 2:a-gradsekv. och fås

$$s = r^2 = -\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2}\right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}$$

Det vi har under kvadratroten blir alltid >0, så bägge s blir reella och <0 och alla fyra r-värdena blir rent imaginära: $r_{1,2} = \pm i\omega_1$, $r_{3,4} = \pm i\omega_2$.

$\omega_1 = \sqrt{(\quad) + \sqrt{(\quad)^2 - k_1 k_2/m_1 m_2}}$ och

$\omega_2 = \sqrt{(\quad) - \sqrt{(\quad)^2 - k_1 k_2/m_1 m_2}}$ från r^2 ovan.

Vi får en kombination av två sinus-svängningar:

$x_1(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t$.

$x_2(t)$ fås sedan ur $x_2 = \frac{m_1}{k_2}\cdot x_1'' + \frac{k_1+k_2}{k_2}\cdot x_1$.

Koefficienterna A, B, C och D kan slutligen bestämmas mha. begynnelsevillkor.

Numerisk lösning (mha Eulers metod):

Inför $u(t) = x_1(t)$, $v(t) = x_2(t)$, $w(t) = x_1'(t)$, $z(t) = x_2'(t)$ och den 4-kolumnvektorvärda funktionen $Y(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))^T$.

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t)\\ v'(t)\\ w'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\\ z\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0\\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\\ z\end{pmatrix} = A\cdot Y(t)$$

Om vi har begynnelsevärdena $u_0 = x_1(t_0)$, $v_0 = x_2(t_0)$, $w_0 = x_1'(t_0)$ och $z_0 = x_2'(t_0)$ får vi mha Eulers metod $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, $u_{k+1} = u_k + \Delta t \cdot w_k$, $v_{k+1} = v_k + \Delta t \cdot z_k$, $w_{k+1} = w_k + \Delta t\cdot\left(-\frac{k_1+k_2}{m_1}\cdot u_k + \frac{k_2}{m_1}\cdot v_k\right)$ och $z_{k+1} = z_k + \Delta t\cdot\left(\frac{k_2}{m_2}\cdot u_k + \frac{k_2}{m_2}\cdot v_k\right)$.