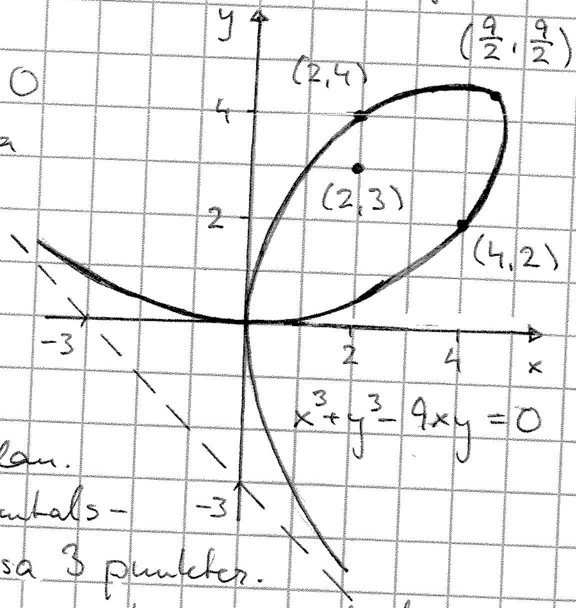
Gk2 i Matematik, datorövning 3, 29.4.2010 Metsalo

0) Vi använder åter programpaketet Mathematica. Se åter kommentarerna i uppg. 10 och sammanfattningen i uppgiftsbladet för datorövn. 1.

1) Cartesii blad $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ är bekant från bl. a. förra datorövningen. Hos själva öglan är origo längst bort från punkten (2, 3), men avståndet till (2, 3) antar också ett lok. max och ett lok. och ett glob. min på öglan.



Använd Newtons metod (tentamenslappen v9) för att approx. dessa 3 punkter.
Efteråt kan svaret kontrolleras mha. parameterframställningen av Cartesii blad från datorövning 2.
Gott råd: Avståndet till punkten (2,3) maximeras/minimeras då avståndets kvadrat maximeras/minimeras.
Arbeta lämpligast med en 3-kolumnvektor x, vars komponenter är punktens x-koordinat, punktens y-koordinat samt Lagrange-multiplikatorn λ.
En 3-kolumnvektor $a = (2, 3, 5)^T$ matas in som a = {{2}, {3}, {5}} och dess 3:e element kan då anropas som a[[3, 1]]. Glöm inte att dubbelklicka för ^ (upphöjt till).
Lämpliga begynnelsevärden för x och y (dvs. för x[[1, 1]] och x[[2, 1]]) fås ur figuren ovan, lämpliga begynnelsevärden för λ (dvs. x[[3, 1]]) kan fås ur endera av ekvationerna

$\partial L / \partial x = 0$ (dvs. $\partial f / \partial x + \lambda \cdot \partial g / \partial x = 0$) och

$\partial L / \partial y = 0$ (dvs. $\partial f / \partial x + \lambda \cdot \partial g / \partial y = 0$).

Alternativt kan man dra till med något λ-värde och hoppas på att iterationen ändå konvergerar (går det så går det!) Använd piltangenterna vid iterationen, för samma kommandon används ju om och om igen.

v.g. vänd

2) Under datorövn. 1 ritade vi Vivianis kurva från 11.1.14 (uppg. I1, v7) och approximerade dess längd mha. NIntegrate. Kurvans tyngdpunkt finns av symmetriskäl på y-axeln. Approximera tyngdpunkten mha. NIntegrate.

3) Mathematica kan även beräkna multipla integraler. Använd Integrate för att beräkna volymen hos miljonärens bassäng i uppg. D2, v11 samt datorövn. 2.

4) Skissa helicoiden (spiralrampen) $\bar{F}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, 8v)$, $u\in[6,15]$, $v\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ från uppg. I4, v15 mha. ParametricPlot3D.

5) Skissa ytan $\bar{F}(u,v)=(\tan v - u\cdot\sin v, -u, 1-u\cdot\cos v)$, $u\in[-2,4]$, $v\in[-1.4, 1.4]$. Sätt PlotRange -> All innuti ParametricPlot3D-kommandot, så inte Mathematica kapar av en del av ytan. Beräkna också ytans area.

6a) Rita nivåkurvorna för $f(x,y)=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$ mha. ContourPlot, precis som i datorövn. 2. $-2\le x,y\le 2$ är ett lämpligt område.

b) Skissa vektorfältet $\bar{u}(x,y)=\text{grad}(f)=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\hat{j}=$ $=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ mha. VectorPlot. (D ger även partiella derivator.) Sammanför nivåkurvorna från ContourPlot och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan f och ∇f: ∇f pekar åt det håll varåt f ökar snabbast och dess längd ger f:s ökningshastighet i den riktningen. (Om vektorerna i vektorfältet är för små, ta då ett något mindre område, t.ex. $-1.2\le x,y\le 1.2$.)

c) Skissa nivåkurvorna för skalärfältet $g(x,y)=\text{div}(\bar{u})=$ $=\nabla\cdot\bar{u}=\partial P/\partial x+\partial Q/\partial y$, där $\bar{u}$ är vektorfältet från b)-delen mha. ContourPlot. Sammanför nivåkurvorna och vektorfältet mha. Show och studera sambandet mellan $\bar{u}$ och $\nabla\cdot\bar{u}$: $\nabla\cdot\bar{u}$ är positivt där $\bar{u}$ lokalt sprider sig och negativt där $\bar{u}$ lokalt drar sig samman.

7) Sätt nu $f(x,y)=\sqrt[4]{((x+1)^2+y^2)\cdot((x-1)^2+y^2)}$ och skissa det plana vektorfältet (i $\mathbb{R}^3$) $\bar{v}(x,y)=$
$=(-2xy/f(x,y))\hat{i}+((x^2-y^2-1)/f(x,y))\hat{j}=$
$=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ $(+0\hat{k})$. Beräkna vektorfältet $\bar{w}(x,y,z)=\mathrm{rot}(\bar{v})=\nabla\times\bar{v}=0\hat{i}+0\hat{j}+(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)\hat{k}=$
$=h(x,y)\hat{k}$. Skissa nivåkurvorna för $h(x,y)$ mha. ContourPlot och sammanför nivåkurvorna för h och vektorfältet $\bar{v}$ mha. Show för att studera sambandet mellan $\bar{v}$ och $\nabla\times\bar{v}$.

Lämna Mathematica via Quit under File, stäng Mathematica-fönstret och anropa Firefox genom att skriva firefox ↵

8) Anropa (det gamla) programpaketet matta 2 genom att skriva http://matta.hut.fi/matta2/ och välj sedan DEW1 från Materiaalit. DEW1 är ett paket för numerisk (approximativ) lösning av 1:a ordningens differentialekvationer. Skriv in diff.ekvationen i motsvarande ruta (välj t.ex. någon av de 3 diff.-ekvationerna $y'(t)=2t^2\cdot y^2$, $y'(t)=y+\cos t-\sin t$ och $y'(t)=t^2+y^2-1$ från datorövn. 1). Observera att i DEW1 heter den oberoende variabeln t, inte x. DEW1 ritar ett fält av <u>tangentlinjesegment</u> till lösningskurvorna och om ni väljer en punkt genom att klicka med musen eller genom att mata in punktens koordinater manuellt, ritar DEW1 en approximation av lösningskurvan genom den punkten. Gör sedan gärna samma sak med diff.ekvationen $y'(x)=k_1(x,y)$ för ellipsskaran i uppg. I3, v17 (skriv t i stället för x) och med diff.ekvationen $y'(x)=k_2(x,y)=-1/k_1(x,y)$ för den ortogonala kurvskaran.

Lämna Firefox. Om några av uppgifterna från de tidigare datorövningarna är ogjorda så passa på att anropa Mathematica igen och göra dem.
Glöm inte att <u>logga ut</u> efteråt mha. musen.