

0) Datorövningarna kräver förberedelser hemma, precis som räknövnngarna! Att läsa igenom uppgifterna för första gången då man redan sitter vid datorn är att kasta bort möjligheten att lära sig något! Gå igenom materialet i lugn och ro hemma, tänk efter hur man rent matematiskt skall gå tillväga för att lösa uppgifterna och låt sedan datorn göra själva räknearbetet!

Under denna datorövning använder vi programpaketet Mathematica. Logga in direkt i arbetsstationen, vid vilken ni sitter och starta därefter Mathematica genom att skriva `mathematica` ←. Mathematica ritar då upp (bl.a.) ett fönster, dit ni skriver kommandona, som i Mathematica avslutas med Stift Enter. Mha. pilknapparna kan man röra sig i fönstret. På hemsidan finns en sammanfattning av grunderna för Mathematica. (upphöjt till) fäs via dubbelklickning.

- 1) Mathematica kan rita funktioners grafer mha. `Plot`. Rita t.ex. kurvan $y = f(x) = \sin(1/x)$, $x \in [-4, 7]$.
- 2) Mathematica kan derivera symboliskt mha. `D`. Beräkna t.ex. $\frac{d}{dx}(\sin(x^3) + 17)$. Likaså kan Mathematica beräkna antiderivator (obestämda integraler) mha. `Integrate`. Beräkna antiderivaten till derivatan av $\sin(x^3) + 17$.
- 3) Mathematica kan även beräkna bestämda integraler mha. `Integrate`. Beräkna t.ex. arean innanför \sin i uppg. D1, mha `%`.
- 4) Somliga antiderivator klarar Mathematica dock inte av. Prova t.ex. $\int \sin(\sqrt{1+x^6}) dx$. Men bestämda integraler kan approximeras mha. `NIntegrate`. Låt Mathematica t.ex. approximera $\int_0^1 \sin(\sqrt{1+x^6}) dx$.

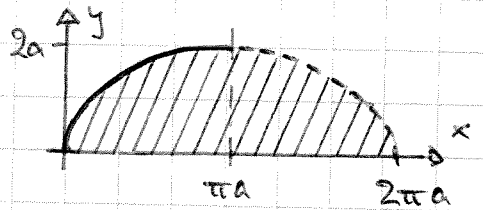
v.g. vänd

5) Kurvor i planet, givna på parameterform, kan ritas uha. ParametricPlot. Rita Lissajous-figuren (se kap. 8.2)
 $(x(t), y(t)) = (\cos(5t), \sin(3t))$.

6) Kurvor på polär form kan ritas uha. PolarPlot. Rita treklövern $r(\theta) = \cos(3\theta)$ (och kalla gärna parametern för t i stället för θ).

7) Serden kan beräknas uha. Sum. Beräkna hur mycket Potter dricker under Svakars sillis.

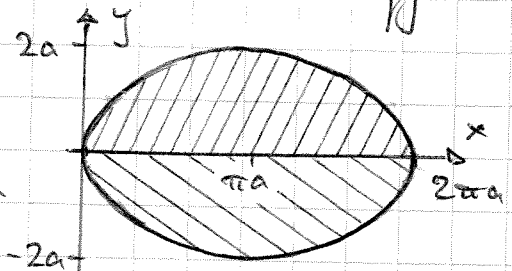
8) En halv båg av cykloiden ges på parameterform av $(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $a > 0$, $0 \leq t \leq \pi$. Då bågen roteras kring den vertikala linjen $x = \pi a$ uppstår en rotationsymmetrisk yta.



a) Beräkna arean A hos denna yta.

b) Under denna yta finns en rotationsymmetrisk kropp, som påminner om gulan hos ett stekt ägg. Beräkna dess volym V .

c) Om vi sätter ihop två stekta ägg, får vi en rot.symm. kropp som är lik ett tillplattat klot med volymen $2V$ och arean $2A$. Använd kontrollen i uppg. D2, må v4 genom att kontrollera, att $(2A)^3 / (2V)^2 \approx 36\pi$.



9a) Använd ContourPlot3D för att rita ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 55 = 0$. Ekvationen ges med två likhetstecken == i Mathematica.

b) Rita även den elliptiska konen $x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$ och sammanför de två figurerna uha. Show.

c) Rita den enmantlade hyperboloiden $x^2 + 16y^2 - 8z^2 + 44xy + 8yz - 52zx - 12x + 240y - 142z = 0$. Genom att klicka på figuren kan man vrida på den uha. unsen.

10) Rita Vivianis kurva från 11.1.14 (uppg. I1, v7) mha. ParametricPlot3D (sätt $a=1$ i figuren) och approximera dess längd mha. NIntegrate.

11a) Rita kurvan som i polära koordinater ges av $r(\theta) = 2 + \cos(3\theta/2)$ mha. PolarPlot (och kalla åter θ för t i stället).

b) Rita överhandsknopen från uppg. I3, v7 mha. ParametricPlot3D.

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{r}(t, v) &= (x(t, v), y(t, v), z(t, v)) = \\ &= ((2 + \cos(3t/2)) \cdot \cos t + \frac{1}{5} \cdot \cos t \cdot \cos v, \\ &\quad (2 + \cos(3t/2)) \cdot \sin t + \frac{1}{5} \cdot \sin t \cdot \cos v, \\ &\quad \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \sin(3t/2) + \frac{1}{5} \cdot \sin v), \quad t \in [0, 4\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

ger en yta på parameterform, nämligen en förtjockad version av knopen i b)-delen. Rita även den mha. ParametricPlot3D och vrid på den mha. mouse.

12) Rita Möbius-bandet $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = ((1 + u \cdot \cos \frac{v}{2}) \cdot \cos v, (1 + u \cdot \cos \frac{v}{2}) \cdot \sin v, u \cdot \sin \frac{v}{2})$, $u \in [-1/4, 1/4]$, $v \in [-\pi, \pi]$ mha. ParametricPlot3D.

13) Mathematica kan lösa en del diff.ekvationer mha. DSolve.

a) Lös den separabla diff.ekvationen $y' = 2x^2y^2$ mha. $\text{DSolve}[y'[x] == 2 * x^2 * (y[x])^2, y[x], x]$

b) Bestäm allmänna lösningen till den linjära 1:a ordningens diff.ekvationen $y' = y + \cos x - \sin x$ samt lösningen, som satisfierar begynnelsevillkoret (BV) $y(0) = 0$.

Jämför lösningarna med lite olika BV $y(0)$.

$\text{Plot}[\text{Evaluate}[y[x]/\%, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$

med lämpliga värden på x_{\min} och x_{\max} insatta direkt efter DSolve-kommandot ritas lösningskurvan.

14) Approximera några lösningskurvor till $y' = x^2 + y^2 - 1$ mha. NDSolve. Använd t.ex. BV $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ och $y(-1) = 0$ och rita lösningskurvorna som i uppg. 13b).

Lämnar Mathematica genom att välja Quit under File och glöm inte att logga ut efteråt!

- *Mathematica* hjälpsystem används på följande sätt: ?Det ger uppgifter om Det, ??Det ger en noggrannare beskrivning. °-tecknet fungerar som en joker, dvs. ?Int° räknar upp all funktioner som börjar med Int. ?°Int° osv.
 - *Mathematica* egna funktioner och befallingar börjar alltid med stor bokstav, och består i allmänhet av hela ord, dvs. Integrate, Det, Inverse. Om funktionens namn är ett sammansatt ord, så börjar bägge delarna med stor bokstav, t.ex. MatrixForm, NullSpace (obs! Eigensystem, är undantaget som bekräftar regeln). Funktionernas argument ges inom hårda parenteser [].
 - *Mathematica* ger namn åt inmatade och utmatade data av typen In[luku], Out[luku]. Dessa kan användas som referenser; dessutom kan man hänvisa till utmatad data med hjälp av %-tecknet. Således betyder %5 samma sak som Out[5] och ett enkelt % hänvisar till föregående utmatning.
 - Om man skriver ett semikolon i slutet av en inmatning så skrivs inte resultatet ut; trots det kan man hänvisa till resultatet med ett %-tecken. Flera inmatningar kan ges på samma rad separerade av semikolon.
 - *Mathematica* känner bl.a. följande konstanter: I (imaginärenheten), Pi (π) och E (e dvs. Nepers tal).
 - Multiplikationstecknet kan ersättas med ett mellanslag: x*y eller x y; obs att om mellanslaget fattas så tolkas xy som en variable vars namn är xy. Exponenten tecken är ^, t.ex. $3^5 = 3^5$.
 - *Mathematica* känner till bl.a. följande elementärfunktioner: Exp, Sqrt, Sin, Cos, Log, ArcTan osv. Kom ihåg stora begynnelsebokstäver! Numeriska värden får man med kommandot N, t.ex. N[Exp[Pi]], N[Pi,30] ger π med 30 korrekta decimaler. Försök uttryck av typen Sin[Pi/2] och Exp[I Pi]. Vinklar ges således i radianer. Konstanten som förvandlar grader till radianer heter Degree = $\pi/180$: t.ex. Sin[45 Degree].
- Då man upphöjer ett komplext tal i en potens, och därefter tar motsvarande rot av talet, får man i allmänhet inte samma tal tillbaka som man startade med. försök t.ex. följande: $(0.3+0.8 I)^5\%^{(1/5)}$. Det rör sig inte om ett programmeringsfel utan om att komplexa rötter inte är entydigt definierade...försök också räkna $(-1.0)^{(1/3)}$.
- Elementärfunktioner godtar således också komplexa argument, försök med Log[2.3+5.5 I], Sin[-9.3+6.6 I].