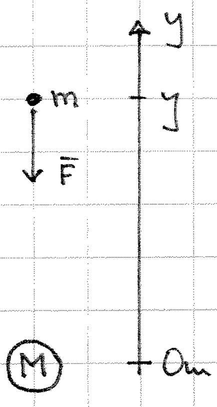
Gk2 i Matematik, hemtal on v18/09 Metsalo

Detta är <u>sista hemtalsomgången</u>. <u>3:e mellanförhöret</u> äger rum on 6.5. kl. 16–19 och omfattar <u>kap. 14–16 samt kap. 17/appendix IV</u> (uppl. 4 och 6/uppl. 5) i Adams.
Fr 15.5. kl. 8–12 är det <u>turbotentamen</u>, då det går att <u>antingen</u> ta om ett mellanförhör (3h) <u>eller</u> skriva sluttentamen (4h). Till turbotentamen måste man <u>förhandsanmäla</u> sig.
På Valborgsmässoaftonen (to 30.4.) är föreläsningen <u>inställd</u>, eftersom pluxarna har annan verksamhet då.
Sista föreläsningen (ti 5.5) används åt repetition samt besvarande av frågor.
Fyll i <u>kursutvärderingen</u> på kursens hemsida.



On: 1) Ett föremål med massan m, som befinner sig på avståndet y från jordens mittpunkt, utsätts enligt Newtons gravitationslag och demo fr v14 för kraften $F = -GMm/y^2$, där G är universella gravitationskonstanten (betecknad k i Adams) och M är jordens massa. På jordytan är $F = -mg = -GMm/R^2$, där R är jordens radie, så $GM = gR^2$.

Höjden $y(t)$ hos ett föremål, som skjuts upp från jordytan, satisfierar alltså diff.ekv. $my''(t) = -GMm/(y(t))^2$ eller $y''(t) = -gR^2/(y(t))^2$ om vi bortser från luftmotstånd, månens dragningskraft &c. Denna DE har en lösning $y(t) = a \cdot t^r$, där a och r är positiva konstanter och $r < 1$.

Denna lösning svarar mot att föremålet flyger bort mot oändligheten (eftersom $r > 0$), men allt långsammare (eftersom $r < 1$). Bestäm a och r och visa att för att få denna lösning måste uppskjutningshastigheten vid jordytan (där $y = R$, vilket inte behöver svara mot $t = 0$ s; vi behöver inte starta vår klocka i uppskjutningsögonblicket) vara $y' = \sqrt{2gR} = \sqrt{2GM/R}$ (flykthastigheten).

v.g. vänd

2) Från demo fr v14 fick vi odesså tyngdkraftsaccelerationen inuti ett homogent klot. Antag att jorden är homogen och borra ett hål längs axeln, i vilket vi släpper ned ett föremål med massan m. Beräkna mha. 2:a ordningens linjära ODE från kap. 3.7 (Gk1) hur lång tid det tar innan föremålet återvänder. Bortse från luftmotstånd, använd att $g \approx 9.81\ m/s^2$ vid jordytan och att $2\pi R \approx$ ≈ 40.000 km. (Detta är egentligen ett specialfall av uppg. 8C7 på sid 517/470 (uppl. 4 & 5/ uppl. 6) i Adams.)

3a) Bestäm lösningen till (den linjära) diff. ekvationen $y'(x) = x + y(x)$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

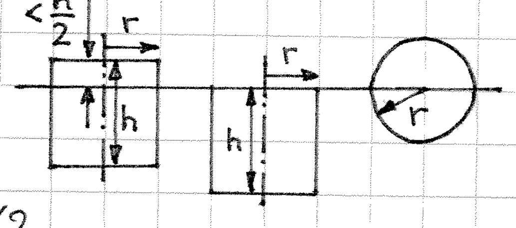
b) Plocka fram <u>fickräknaren</u> och approximera talet $y(1)$ genom att använda <u>Eulers metod</u> för att approximera lösningen till diff. ekvationen. Använd steglängden $h = 0.2$.

c) Gör samma sak med <u>förbättrad Euler.</u>

4a) Bestäm lösningen till $y'(x) = 2x \cdot (y(x))^2$, $y(0) = 1$.

b) Använd <u>Picards iteration</u> för att beräkna approximationerna $\phi_1(x)$ och $\phi_2(x)$ av lösningarna. Observera, att ϕ_1 och ϕ_2 (och ϕ_n för $\forall n \in \mathbb{N}$) är def. i hela $\mathbb{R}$, men att själva lösningen bara är def. i ett intervall kring origo.

Demo: a) Mha. Archimedes' princip från förra fredagens demo och 2:a ordn. linjära ODE från kap. 3.7 (Gk1) bestämmer vi svängningstiden hos en cylindrisk träkloss med $\delta_T > \delta_V/2$ (så mer än halva klossen är under vatten vid vila) om klossen trycks ned i vattnet och släpps så den börjar guppa om det inte förekommer någon dämpning (vilket naturligtvis är rätt orealistiskt i detta sammanhang).



b) Vi bestämmer svängningstiden för <u>små</u> svängningar hos ett träklot med $\delta_T = \delta_V/2$, om det inte förekommer någon dämpning mha. <u>linearisering</u>. Samma metod kan användas för att bestämma svängningstiden för små svängningar hos allmänna kroppar odesså.

Glöm inte kursutvärderingen.

Tack för det gångna läsåret! Georg M.