Gk2 i Matematik, kemtal v17/09 Metsalo

Sista datorövningen äger rum fr 24.4. Uppgifterna kommer att delas ut separat. På baksidan finns en tillämpning av differentialekvationer. Studera hur den fysikaliska situationen ger ett system med 2 diff. ekvationer, som sedan omvandlas till en enda diff.ekvation.

Öv: 1) $\bar{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\hat{j}$, då $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

a) Visa att $\operatorname{div}(\bar{F}) = \nabla\cdot\bar{F} \equiv 0$ i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

b) Visa att $\operatorname{rot}(\bar{F}) = \operatorname{curl}(\bar{F}) = \nabla\times\bar{F} \equiv \bar{0}$ i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

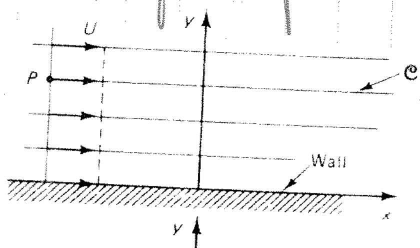
c) Beräkna $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$, då C är enhetscirkeln i xy-planet, genomlupen ett varv moturs.

2a) Bestäm parametrarna α, β och γ så att vektorfältet $\bar{F} = (2x+z+e^y\sin(\alpha x))\hat{i} + (3y - e^y\cos(\alpha x))\hat{j} + (x+\beta y+\gamma z)\hat{k}$ är såväl källfritt som virvelfritt i $\mathbb{R}^3$.

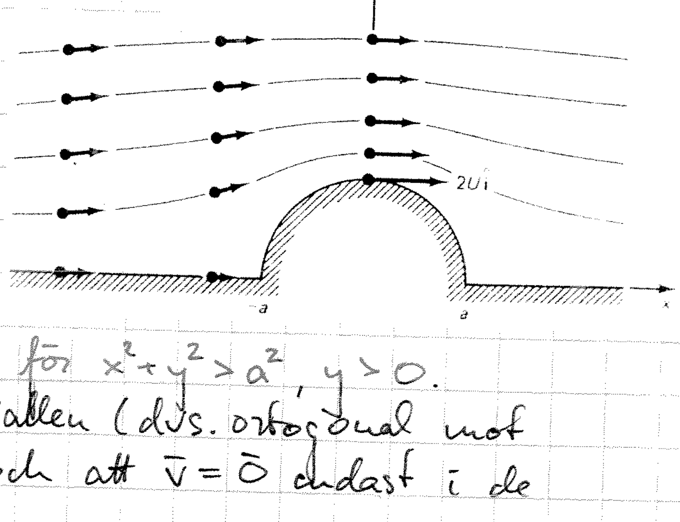
b) Virvelfriheten i $\mathbb{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) skalär potential $\Phi \ni \bar{F} = \operatorname{grad}(\Phi) = \nabla\Phi$. Bestäm någon sådan skalär potential Φ.

c) Källfriheten i $\mathbb{R}^3$ som saknar hålrum, medför att $\bar{F}$ har en (icke entydigt bestämd) vektorpotential $\bar{G} \ni \bar{F} = \operatorname{rot}(\bar{G}) = \operatorname{curl}(\bar{G}) = \nabla\times\bar{G}$. Använd metoderna i ex 1, kap. 16.2 för att bestämma någon sådan vektorpotential $\bar{G}$.

3) Om vi har en inkompressibel vätska, som strömmar i övre halvplanet $y>0$, kan hastighetsfältet ges av $\bar{v}(x,y) = U\hat{i}$ som i den övre figuren t.h.



Om vi lägger en halvcirkulär vall i vätskans väg som i den nedre figuren (figurerna stulna ur M.D. Greenberg: Advanced Engineering Mathematics) får vi hastighetsfältet $\bar{v}(x,y) =$



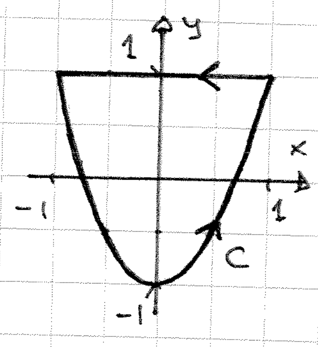
$= U\left(\hat{i} + \frac{a^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left((y^2-x^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}\right)\right)$ för $x^2+y^2>a^2$, $y>0$.

a) Visa att $\bar{v}$ är parallell med vallen (dvs. ortogonal mot vallens normal) längs vallen och att $\bar{v}=\bar{0}$ endast i de två hörnen $(\pm a, 0)$.

b) Visa att $\bar{v}$ är källfritt, dvs. att $\operatorname{div}(\bar{v}) = \nabla\cdot\bar{v} \equiv 0$.

v.g. vänd

4) Beräkna kurvintegralen $\oint_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$, där $\bar{F}(x,y) = 2x\hat{i} + xy\hat{j}$ och C är den slutna kurvan, som går från $(1,1)$ till $(-1,1)$ längs linjen $y = 1$ och därefter tillbaka till $(1,1)$ längs parabeln $y = 2x^2 - 1$



a) direkt som en kurvintegral (bryt upp i 2 delar)

b) genom att omvandla den till en ytintegral mha. Greens sats.

Demo: Utanför en punktmassa M finns ett gravitations-accelerationsfält $\bar{a}(\bar{r}) = -\frac{GM}{|\bar{r}|^3}\bar{r}$, som i figuren vid förra fredagens demo, där origo är i M och G är den universella gravitationskonstanten. Demo fr v14 gav att vi också får samma gravitationsaccelerationsfält utanför ett homogent sfäriskt skal och utgående från detta får vi att gravitationsaccelerationsfältet är detsamma även utanför en sfäriskt symmetrisk kropp. Utgående från detta och mha. divergenssatsen (Gauss' sats) och resultatet från förra fredagens demo visar vi att gravitationsaccelerationsfältets flöde in genom en sluten, orienterbar yta är direkt proportionell mot massan innesluten av ytan.

Fr: 1a) 16.4.20 b) 16.4.21

2) Beräkna flödet $\oiint_S (\bar{F} \bullet \hat{N})\,dS$ av vektorfältet $\bar{F}(x,y,z) = \hat{i} + y\hat{j} + z^2\hat{k}$ ut genom sfären $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

a) direkt som en ytintegral

b) genom att omvandla den till en rymdintegral mha. Gauss' sats (divergenssatsen).

3) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial S} \bar{v} \bullet d\bar{r}$ av vektorfältet $\bar{v}(x,y,z) = 2y\hat{i} + x^2\hat{j} + 3x\hat{k}$ längs randkurvan ∂S till halvsfären $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0$

a) direkt som en kurvintegral

b) genom att omvandla den till en ytintegral över halvsfären S mha. Stokes' sats

c) genom att omvandla den till en ytintegral över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 16,\ z = 0$ (som ju har samma randkurva som halvsfären) mha. Stokes' sats.

4) Låt $h(r)$ vara en deriverbar funktion av en variabel, definierad i $]0, \infty[$. Låt $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ vara positionsvektorfältet i $\mathbb{R}^3$ och $r = |\bar{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ (betecknad ρ i sfäriska koordinater).

$$\bar{H}(x,y,z) = h(r)\bar{r} = h((x^2+y^2+z^2)^{1/2})\cdot(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

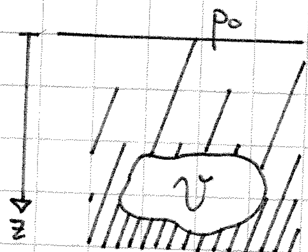
är då ett vektorfält definierat i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

a) Visa att för att $\bar{H}$ skall vara källfritt i $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ (dvs. $\mathrm{div}(\bar{H}) = \nabla \cdot \bar{H} \equiv 0$), måste h satisfiera differentialekvationen $r \cdot h'(r) + 3h(r) = 0$.

b) Bestäm allmänna lösningen till denna diff.ekv.

c) Visa att om h satisfierar denna diff.ekvation, så är $\bar{H}$ även konservativt i $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ genom att bestämma en skalär potential $\Phi(x,y,z)$ till $\bar{H}(x,y,z)$ i $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ sådan att $\mathrm{grad}(\Phi) = \nabla\Phi = \bar{H}$.

Demo: I en vätska med den variabla densiteten $\delta(z)$ (som förmodligen ökar med djupet z) ges trycket på djupet z av



$$p(z) = p_0 + \int_{0}^{z} g \cdot \delta(\zeta) \cdot d\zeta,$$

där p_0 är lufttrycket vid ytan och g är tyngdkraftsaccelerationen. Om en kropp V nedsänkes i vätskan, kommer vätsketrycket att påverka kroppen med en kraft. Mha. Gauss' universalsats (vektorversionen av divergenssatsen) härleder vi

<u>Archimedes' princip:</u> Lyftkraften varmed en vätska påverkar en i den nedsänkt kropp är lika med den undanträngda vätskans tyngd.

För exemplet på baksidan kan det vara bra med ett förstoringsglas till hjälp. På hemsidan är texten större.