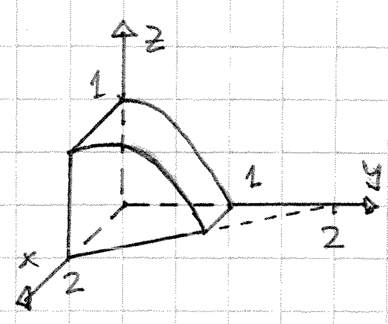
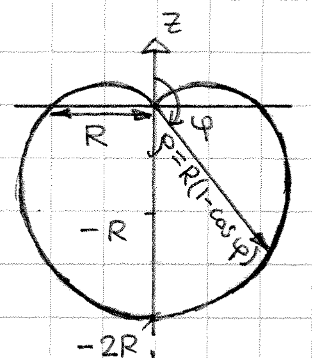
På insidan av detta blad finns ett supplement om differentialekvationer.

On: (före påsklovet)

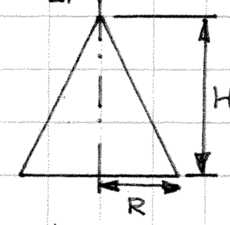
1) Beräkna $\iiint_D xz\,dV$, då D är området i figuren till höger, begränsat av koordinatplanen, planet $x+y=2$ samt den paraboliska cylindern $y^2+z=1$.



2a) Beräkna massan hos den äppelformade kroppen, som begränsas av rotationskardioiden $\rho=R(1-\cos\varphi)$ (uttryckt i sfäriska koordinater), om den på avståndet ρ från origo har densiteten $\delta(\rho,\varphi,\theta)=\delta_0\cdot\rho/R$.

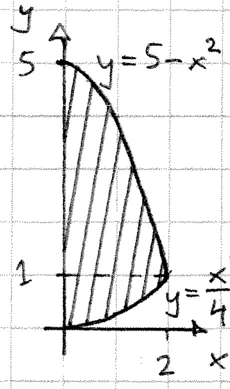


b) Konen till höger har radien R, höjden H och den konstanta densiteten δ_0. Beräkna dess tröghetsmoment med avseende på symmetriaxeln.

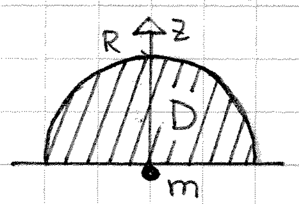


3a) Bestäm krökningsradien hos parabeln $y=x^2/4$ i origo (se kap. 11.5)

b) Det skuggade området till höger roterar kring y-axeln. Bestäm tyngdpunkten hos den rotationssymmetriska kroppen, som uppstår.

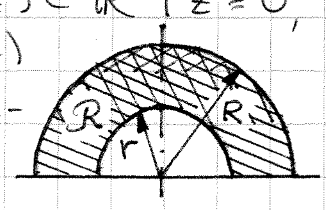


4a) Bestäm tyngdpunkten hos det homogena halvklotet D med radien R och den konstanta densiteten δ_0 till höger.



b) Beräkna gravitationskraften, varmed halvklotet påverkar en punktmassa m i klotets mittpunkt (se fig. t.h.), analogt med demo förra fredagen. Observera, att vi <u>inte</u> skulle få samma kraft, om vi skulle koncentrera hela halvklotets massa till dess tyngdpunkt.

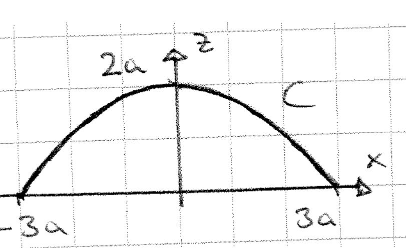
Demo: Det urgröpta halvklotet $\mathcal{R}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\geq 0, r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z)=\delta_0\cdot z/R$. Vi bestämmer förhållandet r/R så kroppens tyngdpunkt finns på urgröpningens yta.



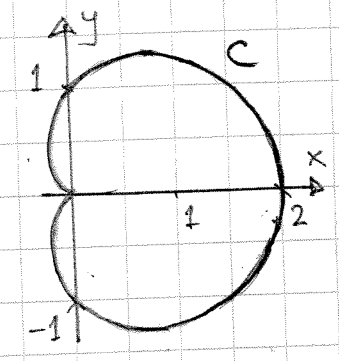
Fredagens hemtal (efter påsklovet) på baksidan.

Fr. (efter påsklovet)

1) Den plana kurvan $C = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 2a(1-(x/3a)^2),\ -3a \le x \le 3a\}$ har i punkten $(x,z) \in C$ längddensiteten $\delta(x,z) = \delta_0 \cdot z/2a$. Av symmetriskäl finns C:s tyngdpunkt på z-axeln. Bestäm C:s längd, massa och tyngdpunkt. Låt gärna Mathematica göra slavarbetet. (Jämför med uppg. 1, on v14. Då studerade vi ett plant område, nu studerar vi en kurva.)



2) Kardioidkurvan $C: r = 1 + \cos\theta$ (uttryckt i polära koordinater) har av symmetriskäl sin tyngdpunkt på x-axeln. Bestäm dess tyngdpunkt. (Jämför med uppg. 3, fr. v14! Då studerade vi ett plant område nu studerar vi en kurva.)

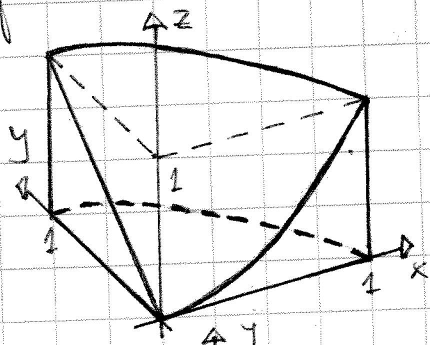


3) Beräkna kurvintegralen $W = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$, där C är den räta linjen från origo till $(1,2,3)$ och $\bar{F}(x,y,z) = \left(e^z + \frac{1}{1+x^2}\right)\hat{i} + 2yz\,\hat{j} + (xe^z + y^2)\hat{k}$

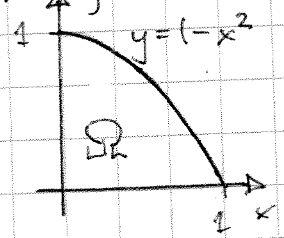
a) direkt som en kurvintegral

b) genom att visa att $\bar{F}$ är konservativt, bestämma $\bar{F}$:s potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att $\nabla\Phi = \bar{F}$ och beräkna W m.h.a. potentialfunktionen.

4a) Kroppen R i figuren till höger ligger i 1:a oktanten och begränsas av koordinatplanen samt de paraboliska cylindrarna $z = x^2 + y$ och $y = 1 - x^2$. Dess botten är alltså det plana området Ω. Dess densitet $\delta(x,y,z) = xz$. Bestäm R:s massa.



b) Ytan S är den övre begränsningsytan till kroppen R i a)-delen. Dess areadensitet $\delta(x,y,z) = xz$. Bestäm ytans massa.



Demo: Vi beräknar flödet av gravitationsaccelerationsfältet utanför en punktmassa M in genom en (tänkt) sfärisk yta med radien R och mittpunkten i punktmassan M (jmf. med ex. 1, kap. 15.6). Kombinerat med divergenssatsen får vi senare ett intressant allmännare resultat!