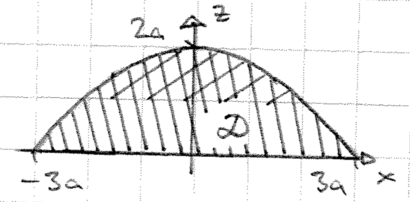
Gk2 i Matematik, Kemtal v14/09 Matsalo

På insidan finns en del integralsatser från kap. 16 och 1:a bladet i Adams. De behandlas mot slutet av terminen.

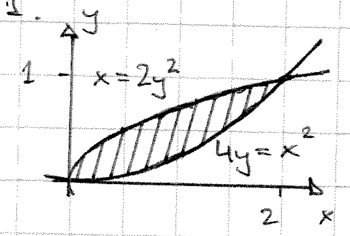


On: 1a) Det plana området $\mathcal{D}$ begränsas av x-axeln och parabeln $z = 2a(1-(x/3a)^2)$ och har i punkten $(x,z) \in \mathcal{D}$ area-densiteten $\delta(x,z) = \delta_0 \cdot z/2a$. Bestäm dess area, massa och medeldensitet.

b) Pga. symmetri finns områdets tyngdpunkt (masscentrum) på z-axeln. Bestäm tyngdpunkten.

2) Beräkna volymen hos kroppen innanför de tre räta cirkulära cylindrarna $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ och $z^2+x^2=a^2$. Observera att kroppen inte är ett klot. Goda råd: utnyttja symmetrin och damma av integrationstekniken från Gk1.

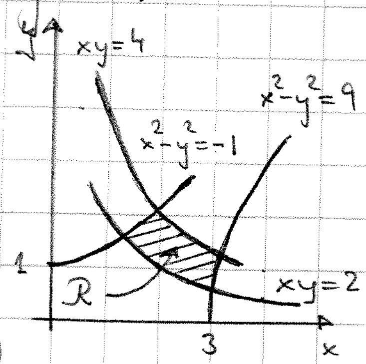
3) Beräkna volymen och massan hos kroppen, vars projektion på xy-planet är det skuggade området till höger, som begränsas upptill av planet $z=2$ och nedtill av den paraboliska cylindern $z=y^2$ om densiteten i punkten (x,y,z) är $\delta(x,y,z)=2x$.



4) Klotet $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z) = \delta_0 \cdot (x^2+y^2+z^2)/R^2$. Bestäm dess massa med hjälp av

a) sfäriska koordinater b) cylindriska koordinater.

Demo: Vi beräknar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (exakt) mha. dubbelintegraler.



Fr: 1) Hyperblerna $x^2-y^2=9$, $x^2-y^2=-1$, $xy=2$ & $xy=4$ begränsar ett område $\mathcal{R}$ i 1:a kvadranten $(x,y>0)$, skuggat i figuren. Beräkna $\iint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)\,dx\,dy$ mha. variabel-substitutionen $u = x^2-y^2$, $v = 2xy$.

Utnyttja, att Jacobianmatrisen $\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix}$ är inversmatrisen till Jacobianmatrisen $\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}$ (jmf. med demo on v10), vilket medför att Jacobianen (Jacobian-matrisens determinant) satisfierar

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}, \text{ då } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \neq \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

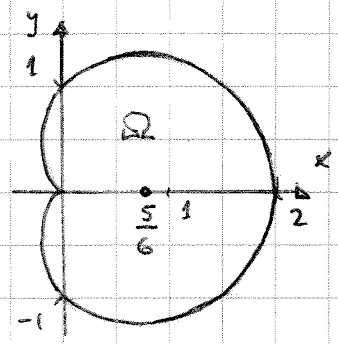
Forts. på baksidan

2) Vi studerar ytorna i ex 5, kap. 14.4 (figuren har bara en fjärdedel av ytorna). Deras skärningskurva är Vivianis kurva, bekant sedan tidigare.

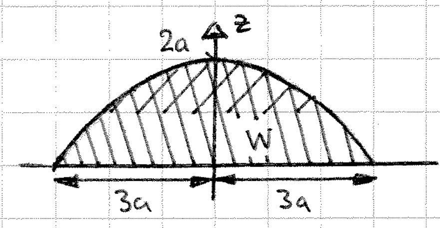
a) Beräkna arean hos den delen av den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$, som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$. Gott råd: använd rektangulära koordinater.

b) Beräkna arean hos den delen av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, som ligger innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2=2ay$ (ytan kallas för Vivianis fönster). Gott råd: använd polära koordinater och demo fr v4.

3) Det plana området Ω till höger är homogent (konstant area-densitet) och begränsas av kardioiden $r=1+\cos\theta$. Visa att dess tyngdpunkt är $(\frac{5}{6}, 0)$. Gott råd: använd polära koordinater.



4) Kroppen W begränsas av xy-planet och rotationsparaboloiden $z=2a\cdot(1-(x^2+y^2)/(3a)^2)$ och har i punkten $(x,y,z)\in W$ densiteten $\delta(x,y,z)=\delta_0\cdot 2z/a$.

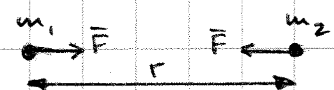


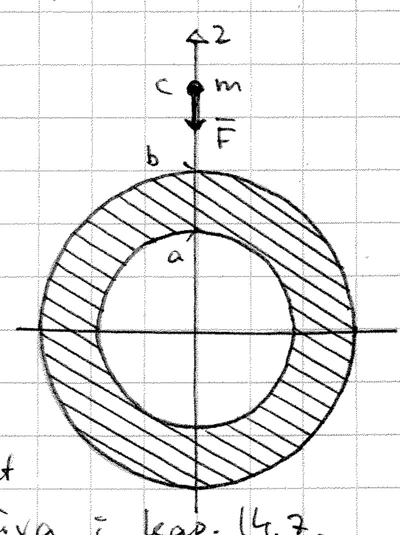
(Jämför med onsdagens uppgift 1. Då studerade vi dock ett plant område, nu studerar vi en kropp.)

a) Bestäm kroppens volym, massa och medeldensitet.

b) Pga symmetri finns kroppens tyngdpunkt på z-axeln. Visa att tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z}=a$.

Demo: Newtons gravitationslag ger att två punktmassor m_1 och m_2 på avståndet r från varandra attraherar varandra med en kraft $\bar{F}$, riktad som i den övre figuren och $|\bar{F}|=Gm_1m_2/r^2$, där G är den universella gravitationskonstanten (betecknad k i Adams; $G\approx 6.670\cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$).





Utgående från detta bestämmer vi gravitationskraften, med vilken ett homogent sfäriskt skal påverkar en punktmassa m utanför (eller innanför) detta skal, analogt med exemplet med gravitationskraften från en cirkulär skiva i kap. 14.7. Utan extra arbete får vi även kraften, om m befinner sig i själva skalet (i motsats till att den befinner sig i hålrummet).

Integralsatserna i kap. 16.3–5 och på första uppslaget, något omformulerade (märk, att satserna gäller under förutsättningen att diverse krav är uppfyllda):

1) $H'(t) = h(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} h(t) = H(t_1) - H(t_0)$.

$\int_{t_0}^{t_1} H'(t)\,dt = H(t_1) - H(t_0)$ IKFS

2) $\nabla\Phi = \bar{F} \Rightarrow \int_C \bar{F}\bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$,

om kurvan C går från punkten P_0 till P_1.

$\int_C (\nabla\Phi)\bullet d\bar{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$

3) $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (P\,dx + Q\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$

$\iint_R (\nabla\times\bar{F})\bullet\hat{k}\,dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F}\bullet d\bar{r}$ Greens sats i $\mathbb{R}^2$

4) $\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial R} (-Q\,dx + P\,dy)$ Inför $\bar{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$

$\iint_R (\nabla\bullet\bar{F})\,dx\,dy = \oint_{\partial R} \bar{F}\bullet\hat{N}\,ds$ Greens sats i $\mathbb{R}^2$

Greens satser i planet är i grund och botten en och samma sats, men i rummet generaliseras de till två helt olika satser:

5) $\iint_S (\nabla\times\bar{F})\bullet\hat{N}\,dS = \oint_{\partial S} \bar{F}\bullet d\bar{r}$ Stokes' sats i $\mathbb{R}^3$

6) $\iiint_D (\nabla\bullet\bar{F})\,dV = \oiint_{\partial D} \bar{F}\bullet\hat{N}\,dS$ Gauss' sats i $\mathbb{R}^3$

7) Stokes' universalsats: $\oint_{\partial S} d\bar{r}(\ldots) = \iint_S (\hat{N}\,dS\times\nabla)(\ldots)$,

där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

8) Gauss' universalsats: $\oiint_{\partial D} \hat{N}\,dS(\ldots) = \iiint_D dV\cdot\nabla(\ldots)$,

där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\bar{F}$ eller $\times\bar{F}$.

Och slutligen lite topologi:
Finn felet i bildsekvensen nedan