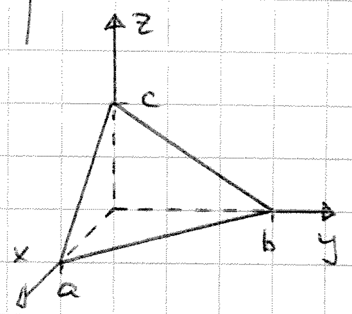
Gk2 i Matematik, hemtal v13/09 Metsalo

Tisdagen 31.3. har vi 2:a mellanförhöret, som omfattar kap. 12-13 i Adams med undantag för kap 13.7 i uppl. 5&6 (som saknar motsvarighet i uppl. 4). Samma regler gäller som för 1:a mellanförhöret. Tänk på att det kan vara svårt att läsa på inför ett mellanförhör och fira årsfest samma helg!
Efter mellanförhöret fortsätter vi med kap. 14–16.



Ou: 1a) Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms i tetraedern i figuren till höger så att tre av rätblockets sidor sammanfaller med koordinatplanen.

b) Ur ett klot med radien R sågas ett rätblock. Visa att av alla möjliga rätblock har kuben med klotets diameter som rymddiagonal största sammanlagda arean hos begränsningsytorna.

2a) Använd Lagrange-multiplikatorer till att maximera och minimera $f(x,y,z) = 8x^2+4yz-16z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 4x^2+y^2+4z^2-16=0$.

b) Använd Lagrange-multiplikatorer till att maximera och minimera $f(x,y,z)=xyz$ under bivillkoren $g(x,y,z)=x^2+z^2-1=0$ och $h(x,y,z)=x-y=0$.

3) 13.4.20 Denna typ av problem dyker också upp i Gk3 i Fourier-analysen.

4) $g(x,y,z) = 17+29x-21y+12z-4x^2-3y^2-z^2+5xy-3xz+3yz-z^4$.

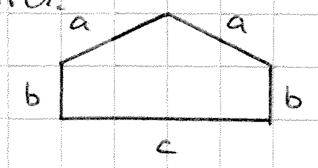
a) Visa att 4:e-gradspolynomet $g(x,y,z)=g(\bar{x})$ har endast en kritisk punkt $\bar{a}$ samt bestäm den.

b) Bestäm g:s Taylor-polynom av grad 2 utvecklad i den kritiska punkten $\bar{a}$. Lämna Taylor-polynomet lämpligast på formen $\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{a})^T \mathcal{H}(\bar{a})(\bar{x}-\bar{a}) + \bar{b}^T(\bar{a})(\bar{x}-\bar{a})+c$ med Hessian-matrisen $\mathcal{H}$.

c) Använd 2:a-derivatatestet för att avgöra, om den kritiska punkten $\bar{a}$ är ett lok. max, ett lok. min eller en sadelpunkt. Se även kap. 10.6 i Adams och kap. 7 i Lay om kvadratiska former.

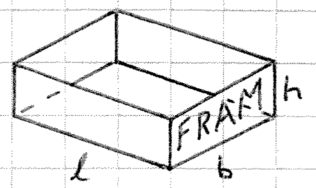
v.g. vänd

Demo: Svakar tänker installera ett vindsfönster.
Fönstret skall ha formen av en likbent triangel ovanpå en rektangel.



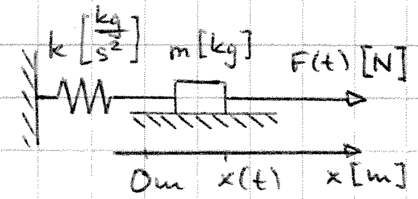
Eftersom Svakar har en tätningslist av längd L, får fönstrets omkrets inte överskrida L.
Vi bestämmer hur fönstret skall dimensioneras så att dess area maximeras.

Fr: 1) Vi vill tillverka en rätblocksformad låda utan lock så volymen blir $V = 60\,dm^3$.



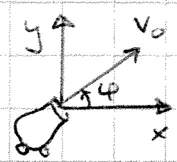
Materialet till botten och framsida kostar $5\,€/dm^2$ och till de övriga tre sidorna $1\,€/dm^2$. Hur skall lådan dimensioneras för att minimera materialkostnaden? Hur stor blir kostnaden då?

2) Visa att funktionen
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{km}} \cdot \int_{0s}^{t} F(\tau)\cdot \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\cdot(t-\tau)\right) d\tau$$
satisfierar den ordinära diff.-ekvationen $m\cdot x''(t) + k\cdot x(t) = F(t)$



samt begynnelsevillkoren $x(0s) = 0m$, $x'(0s) = 0m/s$.

3) Vi skjuter en kanonkula med den fixa begynnelsefarten v_0 och vinkeln φ från horisontalplanet.

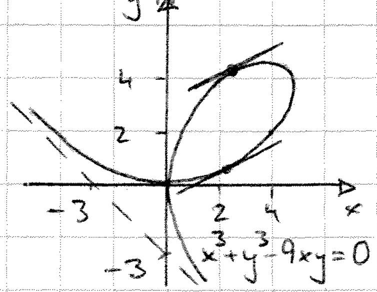


Placera koordinaterna som i figuren och bortse från luftmotstånd, Coriolis-kraft o.d. Då utsätts kulan för accelerationen $\ddot{\bar{r}}(t) = -g\hat{j}$ för $t > 0s$, om vi sätter $t = 0s$ i avfyrningsögonblicket.

a) (gymnasiefysik): Härled kulans position $\bar{r}(t)$ för $t \geq 0s$. När är kulan som högst? Hur högt är den då? Hur långt från kanonen landar kulan? Vilket φ maximerar detta avstånd?

b) (högskolematematik): Olika φ ger olika trajektorier för kanonkulorna. Bestäm trajektoriescharans envelopp.

4) Vi söker de punkter på Cartesii blad $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy = 0$ där lutningen $= 1/2$.



Skriv om kravet $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ på formen $g(x,y) = 0$ och använd Newtons metod för 2 ekv. och 2 obek. med begynnelsevärdena $(x_0, y_0) = (2,4)$ resp. $(x_0, y_0) = (2,1)$ en iteration. Undersök sedan gärna metodens effektivitet mha. parameterframställningen från datorövn. 2.

Demo: Vi visar att evolutan är normallinjescharans envelopp.