Gk2 i Matematik, hemtal v12/09 Metsalo

På baksidan beskrivs <u>Newtons metod</u> för att finna (approximativa) gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta.

Ön: 1) Låt $f(x,y) = 5e^{xy} - \sin(3x) - y^2$

a) I vilken punkt skär tangentlinjen till kurvan $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=1\}$ i punkten $(0,2)$ x-axeln?

b) I vilken punkt skär tangentplanet till ytan $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ i punkten $(0,2,1)$ x-axeln?

2) Låt $T(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 3yz + \ln(x^2+y^2)$

a) Bestäm T:s gradient ∇T.

b) Visa att $\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 \equiv 0$ (T harmonisk).

c) I vilken riktning ökar T fortast i punkten $(0,1,2)$ och hur fort ökar T i den riktningen i den punkten?

d) Hur fort ökar T i riktning mot origo i punkten $(0,1,2)$?

e) Bestäm Taylor-polynomet $P_2(x,y,z)$ av grad 2 av funktionen T, utvecklad i punkten $(a,b,c)=(0,1,2)$. Lämna P_2 med potenser av x $(=(x-0))$, $(y-1)$ & $(z-2)$ i stället för att skriva ut det i potenser av x, y & z.

3) Kälkbacken ligger på en kulle, vars höjd ges av $z = f(x,y) = (160\,000 - x^2 - 2y^2)/1000$, där x-axeln pekar österut, y-axeln norrut och enheten är meter. Calvin befinner sig i punkten $(300, -100, 50)$

a) Hobbes avtågar åt nordost. Går han uppåt eller nedåt?

b) Calvin avtågar i riktningen som går brantast uppåt. I vilken riktning i xy-planet (på kartan) går han?

c) I vilken riktning i $\mathbb{R}^3$ går Calvin?

v.g. vänd

4a) Visa att ekvationen $F(x,y,z)=\sin(x-y)+yz+e^z=1$ bestämmer funktionen $z=g(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten $(1,1,0)$. Bestäm g:s Taylor-polynom av grad 2, utvecklad i punkten $(a,b)=(1,1)$.

b) Visa att ekvationerna $F_1(x,y,z)=xy+e^{yz}+x^3z=3$ och $F_2(x,y,z)=\cos(y^2z)+\ln(y+xz)+x^2=5$ bestämmer funktionerna $x=g_1(y)$ och $z=g_2(y)$ implicit i en omgivning av punkten $(2,1,0)$. Bestäm 1:a gradens Taylor-polynom av funktionerna g_1 och g_2, utvecklade i punkten $a=1$.

Demo: Halvklotet $x^2+y^2+z^2\leq 25^2$, $z\geq 0$ har i punkten (x,y,z) densiteten $\delta(x,y,z)=$ $=9x+12y+20z+375$ (godtyckliga enheter). Vi bestämmer alla kritiska punkter för δ i kroppen, på de två begränsningsytorna samt på begränsningsytornas gemensamma begränsningskurva. Likaså avgör vi var δ är högst resp. lägst samt hur hög densiteten δ är där.

Fr: 1) Antag att $F(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$, att $F(x_0,y_0,z_0)=0$ och att $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z\neq 0$ i punkten (x_0,y_0,z_0), så ekvationen $F(x,y,z)=0$ bestämmer funktionerna $x=X(y,z)$, $y=Y(z,x)$ och $z=Z(x,y)$ implicit i en omgivning av punkten (x_0,y_0,z_0) (så $X(y_0,z_0)=x_0$, $Y(z_0,x_0)=y_0$ och $Z(x_0,y_0)=z_0$).
Visa att i så fall är $\dfrac{\partial X}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial Y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial Z}{\partial x}=-1$

i punkten (x_0,y_0,z_0) (och bli eventuellt av med en fördom)

2) $F(x,y)=(x^2-1)^2-(y^2-1)^2$.

a) Var är $F=0$? Bestäm F:s tecken, där $F\neq 0$.

b) Bestäm F:s kritiska punkter samt deras natur (lok. max, lok. min eller sadelpunkt) mha. 2:a-derivatstestet för funktioner av 2 variabler. Jämför resultaten med F:s tecken.

3) Visa m.h.a. optimering att om α, β och γ är vinklarna hos en plan triangel, så är
$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3/2$.

4) En excentrisk miljonär låter bygga en elliptisk simbassäng vars rand ges av $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$ och som i punkten (x, y) har djupet $f(x, y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + 2y^2)$ (enheten meter överallt). Bestäm de punkter, där djupet i bassängen är störst resp. minst samt djupet i dessa punkter.

Demo: a) Vi visar Herons formel (se uppg. 4, on v10).
b) Vi visar att av alla plana trianglar med en given omkrets $2s$ är det den liksidiga triangeln som har den största arean. (Samma resultat kan även fås utgående från ellipsens definition och egenskaper.)

Efter räkneövningen har vi 2:a datorövningen.
Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.

Nedan beskrivs Newtons metod för att finna (approximativa) gemensamma lösningar till n ekvationer med n obekanta. Detta är en utvidgning av kap. 4.6, då vi hade 1 ekvation med 1 obekant och även av kap. 13.6 i Adams, där man arbetar med 2 ekvationer och 2 obekanta.

<u>Newtons metod</u> för n ekvationer med n variabler:

Om $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är n st. funktioner av n variabler (som vi tänker oss bildar en n-kolumnvektor) och vi söker en lösning till

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}) = 0 \\ f_2(\bar{x}) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

(ett ekvationssystem med n ekvationer och n obekanta)

kan iterationsschemat

$$\bar{x}_{m+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{m+1} = \bar{x}_m - \left(J(\bar{x}_m)\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix} =$$

Matris-invertering

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_m - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_m) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_m) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_m) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_m) \end{pmatrix}$$

med lämpligt begynnelsevärde $\bar{x}_0$ (en n-kolumnvektor) konvergera till ett gemensamt nollställe för de n st. funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Precis som i fallet med 1 ekvation med 1 variabel kan Newtons metod också divergera. Konvergens förutsätter bra begynnelsevärden, men om Newtons metod konvergerar, tenderar den att konvergera snabbt.