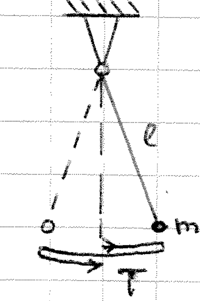
Gk2 i Matematik, hemtal v10/09 Metsalo

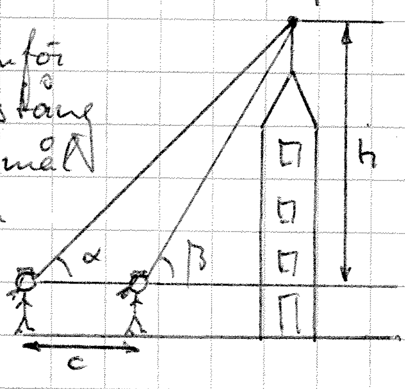
Ou: 1) $f(x,y,z) = x \cdot e^{y+z^2} \Rightarrow f(2,-4,2) = 2$. Approximera $f(2.05, -3.92, 1.97)$ mha. linearisering. Jämför sedan med fickräknarens värde.

2) Svängningstiden T för <u>små</u> svängningar hos en matematisk pendel ges av $T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$, där l är den styva, viktlösa trådens längd och g är tyngdkraftsaccelerationen. Märk att T inte beror på massan m.



Svakar bygger en pendel för att approximera g. Han uppmäter l till 1.00 ± 0.03 m och T till 2.00 ± 0.05 s. Detta ger honom att $g \approx \pi^2$ m/s^2 (≈ 9.87 m/s^2). Använd differentialen till att bestämma en approx. övre gräns för osäkerheten i approximationen $g \approx \pi^2$ m/s^2 av g, som osäkerheterna i l och T ger upphov till. (Den isokrona pendeln (se demo fr v8) har konstant svängningstid också för stora svängningar, om man bortser från luftmotståndet.)

3) Svakar vill mäta hur högt ovanför hans ögonhöjd toppen hos en flaggstång uppe på ett torn är. För detta ändamål mäter han vinkeln α, går sträckan c mot tornet och mäter sedan vinkeln β.

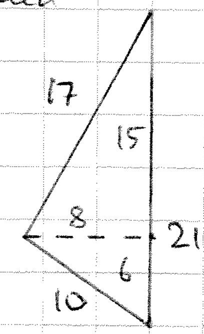


a) (gymnasietrigonometri): Uttryck höjden $h(\alpha, \beta, c)$ som en funktion av α, β & c.

b) (högskolematematik): Svakar uppmätte $\alpha = 30 \pm 2°$ $\beta = 60 \pm 3°$ och $c = 30 \pm 1$ m och fick $h \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \approx 26$ m. Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $h \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30$ m, som osäkerheterna i α, β och c ger upphov till.

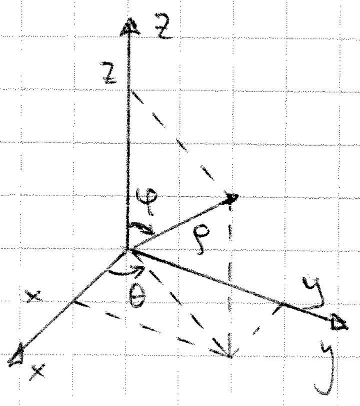
c) Om Svakar bestämmer sig för att minska osäkerheten i h genom ~~att~~ utföra en av mätningarna noggrannare, så dess felmarginal minskar till hälften av dess tidigare felmarginal, vilken mätning bör han göra om?

4) Herons formel säger att en plan triangel med sidorna a, b och c har arean
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, där $s = (a+b+c)/2$
är halva omkretsen. Detta kan också skrivas som $A(a,b,c) =$
$= \frac{1}{4}\left(2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\right)^{1/2}$.



Sidorna hos en triangel uppmättes till 10.0 ± 0.1m, 17.0 ± 0.3m resp. 21.0 ± 0.4m.
Använd differentialen till att beräkna en approximativ övre gräns för osäkerheten i approximationen $A \approx 84\text{m}^2$, som osäkerheterna i a, b & c ger upphov till.

Demo: $f(x,y,z)$ är en funktion av klass $C^1(\mathbb{R}^3)$. Vi inför sfäriska koordinater ρ, φ och θ via
$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$
(se även kap. 14.6). Då är
$f(x,y,z) = f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi) =$
$= F(\rho,\varphi,\theta)$. Vi uttrycker
$\partial F/\partial\rho$, $\partial F/\partial\varphi$ och $\partial F/\partial\theta$ mha.
f:s partiella derivator $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ och $\partial f/\partial z$.



Fr: 1a) Bestäm en normalvektor till ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2=55$ i punkten $P(5,3,2)$.

b) Bestäm en normalvektor till konen $x^2=y^2+4z^2$ i P.

c) Bestäm en tangentvektor till skärningskurvan mellan ellipsoiden och konen i punkten P.

2) Temperaturen T (temperaturenheter) i punkten (x,y,z) (längdenheter) vid tiden t (tidsenheter) ges av $T(x,y,z,t) = e^{-2t}\cdot(\cos(3x-4y)+\sin(5z))$.

a) Visa att $T(x,y,z,t)$ satisfierar den 3-dimensionella värmeekvationen $\partial T/\partial t = c\cdot(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2)$
för ett visst värde på konstanten c (areaenheter per tidsenhet) samt bestäm värdet på c.

b) Hankatten Pelle sitter stilla i origo $(x,y,z)=(0,0,0)$ (längdenheter). Vid tiden $t = 0$ (tidsenheter) erfar han temperaturen $T(0,0,0,0) = 1$ (temperaturenhet).
Vilken ändringshastighet hos temperaturen (temperaturenheter per tidsenhet) erfar han just då?

(forts. på nästa sida)

2c) Svatta rör sig längs skärningskurvan mellan planet $4x-3y-2z=0$ och ytan $x \cdot e^y = y \cdot \cos z$ (längdenheter). Vid tiden $t=0$ (tidsenheter) befinner sig även hon i origo $(x,y,z)=(0,0,0)$ (längdenheter) och rör sig längs skärningskurvan med farten $v=|\bar{r}'(t)|=6$ (längdenheter per tidsenhet) i riktningen som gör att z ökar. Bestäm Svattas hastighetsvektor $\bar{v}(t)=\bar{r}'(t)$ (längdenheter per tidsenhet, fast en vektor) i detta ögonblick.

d) Vilken ändringshastighet hos temperaturen (temperaturenheter per tidsenhet) erfar Svatta just då?

3) Antag att $g(u,v)$ är av klass $C^2(\mathbb{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 \equiv 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x,y)=g\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Då är även $h(x,y)$ av klass $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Visa att h är också harmonisk, dvs. att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 \equiv 0$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4) Vi studerar ytan $xyz=2$ i 1:a oktanten (där $x,y,z>0$). Om vi tar en godtycklig punkt på ytan, så kommer ytans tangentplan i punkten att begränsa en tetraeder tillsammans med de tre koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt bestäm denna volym. (En tetraeder med basarean A och höjden h har som bekant volymen $V=Ah/3$.)

Demo: 12 Ch3 (Challenging Problems) Detta är den 3-dim. analogin till ex 10 i kap. 12.5.

Att skriva ett mellanförhör strax efter en årsfest är inget problem, om man planerar lite i förhand!