Gk2 i Matematik, hemtal v9/09 Metsalo

Onsdagens räkneövning används i huvudsak till att besvara frågor inför torsdagens mellanförhör samt till att gå igenom nedanstående två demon, om tiden räcker till. De illustrerar vad partiella derivator används till. Fredagens hemtal är på baksidan.

Demo 1) En ekvation, där partiella derivator av en sökt funktion av flera variabler ingår, kallas för en <u>partiell differentialekvation</u> (PDE). Låt $T(x,t)$ ange temperaturen i en stång vid positionen x vid tiden t. Då gäller att <u>$\partial T/\partial t = \delta \cdot \partial^2 T/\partial x^2$</u>, där δ är en materialkonstant. Ekvationen kallas för (den 1-dim.) <u>värmeekvationen</u>. Vi motiverar ekvationen samt visar, att $T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-x^2/4\delta t}$ satisfierar den.

Demo 2) Om en sträng är fastspänd mellan punkterna $x = 0$ och $x = L > 0$ på x-axeln och $y(x,t)$ anger strängens utslag från viloläget (dvs. x-axeln) vid positionen x vid tiden t, så gäller att $\partial^2 y/\partial t^2 = c^2 \cdot \partial^2 y/\partial x^2$, där c är en konstant. Ekvationen kallas för (den 1-dim.) <u>vågekvationen</u>. Vidare gäller att $y(0,t) = 0 = y(L,t)$ för alla t (<u>randvillkor</u>; RV). Om strängen utdrages från viloläget och släppes från vila (utan begynnelsehastighet) vid tiden $t = 0$, har vi även <u>begynnelsevillkoret</u> (BV) $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ för $x \in [0, L]$.

Vi motiverar ekvationen samt visar, att $y_n(x,t) = \sin(\frac{\pi n x}{L}) \cdot \cos(c \cdot \frac{\pi n t}{L})$ satisfierar vågekvationen, randvillkoren och begynnelsevillkoret för $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($n = 1$ ger oss grundtonen, $n > 1$ ger oss övertoner). Vi visar också, att $y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sin(\frac{n\pi x}{L}) \cdot \cos(c \cdot \frac{n\pi t}{L})$ också sat. vågekv. och villkoren för varje val av konstanterna a_n och varje ändligt N. Genom lämpliga val av a_n kan vi då också försöka sat. begynnelsevillkor av typ $y(x,0) = f(x)$, $x \in [0, L]$.

Fr: 1a) 12.3.4 b) 12.3.11 c) 12.3.23 d) 12.3.36
(Jämför d)-delen med funktioner av en variabel)

2) Visa att den givna funktionen satisfierar den givna partiella differential-ekvationen:

a) $f(x,y)=\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$; $\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2\equiv 0$ (f sägs vara harmonisk)

b) $f(x,t)=A\cos(\kappa x)\cdot e^{-\kappa^2 t}+B\sin(\kappa x)\cdot e^{-\kappa^2 t}$; $\partial^2 f/\partial x^2=\partial f/\partial t$ (A, B, κ konstanter)
(Jämför med värmeekvationen i onsdags)

c) $f(x,t)=A\sin(x-ct)+B\cos(x-ct)$; $\partial^2 f/\partial t^2=c^2\cdot\partial^2 f/\partial x^2$
(Jämför med vågekvationen i onsdags)

d) $f(r,\theta)=r^n\cdot(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$, $r\neq 0$;
$r^2\cdot\partial^2 f/\partial r^2+r\cdot\partial f/\partial r+\partial^2 f/\partial\theta^2\equiv 0$ ($n\in\mathbb{Z}$; A, B konstanter)

3) Visa att funktionen $h(x,y)=x\cdot\cos(x-y)+y\cdot e^{x-y}$ satisfierar $\partial^2 h/\partial x^2+\partial^2 h/\partial y^2=c\cdot\partial^2 h/\partial x\partial y$ för ett visst värde på konstanten c samt bestäm detta c-värde.

4) $f(x,y)=\begin{cases}(2x^3-y^4)/(x^2+5y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Undersök om f är kont. eller diskont. i origo
b) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ & $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ för $(x,y)\neq(0,0)$.
c) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
d) Undersök om $\partial f/\partial x$ & $\partial f/\partial y$ är kont. el. diskont.

Demo: Låt $f(x,y)$ vara av klass $C^1(\mathbb{R}^2)$, så f och dess partiella derivator av ordning upp t.o.m. 1 är kontinuerliga i hela planet. Vi inför polära koordinater r och θ via $x=r\cdot\cos\theta$ & $y=r\cdot\sin\theta$.
Då är $f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(r,\theta)$.
Vi visar m.h.a. kedjeregeln att $(\partial F/\partial r)^2+(\frac{1}{r}\cdot\partial F/\partial\theta)^2=$
$=(\partial f/\partial x)^2+(\partial f/\partial y)^2$. (Denna formel används senare vid area-beräkningar.)